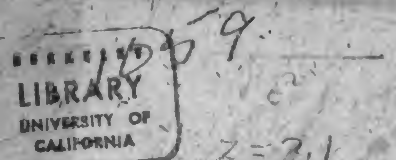





IN MEMORIAM
FLORIAN CAJORI
SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



Beiträge zu der Lehre von den POSITIVEN UND NEGATIVEN GRÖSSEN

von

Dr. W. A. Diesterweg,
ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität.

(Mit vier Steindrucktafeln.)

Bonn 1831.
Verlag von T. Habicht.

CAJORI

B e i t r ä g e

zu der

Lehre von den positiven und negativen Grössen.

Aufgabe I. (Fig. 1.)

Durch einen auf der Verlängerung der Grundlinie DC eines gegebenen Rectangels ABCD gegebenen Punkt E eine gerade Linie EF zu ziehen, welche die der Grundlinie gegenüber liegende Seite in ihrer Verlängerung so schneide, dass das Viereck DCGH zu dem Dreieck BGF in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehe.

1. Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey EF die gesuchte Linie,

so ist $\triangle ECG : \triangle EDH = CE^2 : ED^2$ (El. VI. 19.)

also $\triangle ECG : DCGH = CE^2 \left\{ \begin{array}{l} : CE^2 - ED^2 \\ : KC.CD, \text{ (El. II. 6.)} \end{array} \right.$

wenn $KE = ED$.

Da $DCGH : \triangle BGF = p:q$ (p. hyp.)

$= CD:r$, wenn $CD:r = p:q$;

$= KC.CD : KC.r$

so ist $\triangle ECG : \triangle BGF \left\{ \begin{array}{l} = CE^2 : KC.r, \\ \text{(El. VI. 19.)}\ EC^2 : BF^2 \end{array} \right.$

folglich ist $BF^2 = KC.r$,

somit $KC : BF = FB : r$;

mithin ist BF der Grösse nach, somit der Punkt F und die Lage der geraden Linie BF gegeben.

Construction.

Man mache BP=p, BQ=q, AR#PQ, KE=ED, KL#DA, MB=BL, beschreibe über MR als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte AB in F schneide, und ziehe die gerade Linie EF, so ist dieselbe die gesuchte Linie.

Beweis.

Es ist $\left.\begin{matrix}MB\\BL\end{matrix}\right\}:BF = FB:BR$

also $BF^2 = CK.BR$

folglich $\left.\begin{matrix}EC^2:BF^2\\ \triangle ECG:\triangle BGF\end{matrix}\right\} = EC^2:CK.BR$

Nun ist $\triangle ECG:\triangle EDH = CE^2:ED^2$

mithin $DCGH\cdot\triangle ECG = \left\{\begin{matrix}CE^2-ED^2\\KC.CD\end{matrix}\right\}:CE^2$

somit $DCGH:\triangle BGF = KC.CD:CK.BR$

$= \left\{\begin{matrix}CD\\AB\end{matrix}\right\}:BR$

$= PB:BQ$

$= p:q.$

Zusatz.

Verbindet man auch den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises und der Linie AB, oder ihrer Verlängerung, mit E durch die gerade Linie EF′, welche der verlängerten CB in G′ begegne, so ist

$BF'^2 = CK.BR$

also $\left.\begin{matrix}EC^2:BF'^2\\ \triangle ECG':\triangle BG'F'\end{matrix}\right\} = EC^2:CK.BR$

Nun ist $\triangle ECG' : \triangle EDH' = EC^2 : ND^2$

$$\text{folglich } DCGH' : \triangle ECG' = \left\{ \begin{matrix} CE^2 - ED^2 \\ KC\,CD \end{matrix} \right\} : EC^2$$

$$\text{mithin } DCG'H' : \triangle BG'F' = KC.CD : CK.BR$$
$$= \left\{ \begin{matrix} CD \\ AB \end{matrix} \right\} : BR$$
$$= \quad p : q.$$

Demnach ist die Linie EF′ eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

2. Algebraische Behandlung.

Bezeichnet man den Werth von CD mit a, von ED mit b, von BF mit x,

so ist $\triangle ECG : \triangle EDH = (a+b)^2 : b^2$

$$\text{also } \triangle ECG : DCGH = (a+b)^2 : \left\{ \begin{matrix} a^2 + 2ab \\ a(a+2b) \end{matrix} \right\}$$

Da $DCGH : \triangle BGF = p : q$

$$\text{so ist } \triangle ECG : \triangle BGF \left\{ \begin{matrix} \\ EC^2 \\ (a+b)^2 \end{matrix} \right\} \cdot x^2 \quad = \frac{p}{q}(a+b)^2 : a(a+2b)$$
$$= \frac{a}{r}(a+b)^2 : a(a+2b), \text{ wenn } p : q = a : r;$$
$$= (a+b)^2 : r(a+2b)$$

folglich $x^2 = r(a+2b)$

mithin $x = \pm \sqrt{r(a+2b)}$

Zusatz.

Da die Algebra zwey, einander absolut gleiche, mit den Zeichen $\pm$ versehene Zahlwerthe für die gesuchte Linie BF angiebt, die Geometrie aber zwey der Lage nach entgegengesetzte Linien BF, BF′ construirt, welche der Aufgabe Genüge leisten, so drückt, wenn BF als der positive Werth von x angesehen wird, BF′

den negativen aus. Was also geometrisch betrachtet sich als den Gegensatz der von dem Punkte B aus in entgegengesetzten Richtungen gezogenen geraden Linien darstellt, deutet die Algebra durch den Gegensatz der Zeichen $\pm$ an.

Aufgabe II. (Fig. 2.)

Eine gegebene gerade Linie AB in zwey Segmente AC, CB zu theilen, dass die Summe der Quadrate derselben dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie p gleich sey.

1. Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so ist, wenn ACD=R, DC=CA genommen, die gerade Linie AD gezogen, und bis zu dem in B auf AB aufgerichteten Perpendikel BE verlängert wird, AC:CD=AB:BE,

also EB=BA,

mithin ist der Punkt E und die Linie AE der Länge nach gegeben.

$$\text{Auch ist } DC^2 = CA^2$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} DC^2 + CB^2 \\ BD^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = AC^2 + CB^2 \\ = p^2 \end{matrix}$$

folglich BD=p.

Demnach liegt D auf dem Umfange eines aus B als Mittelpunkt mit einem Radius = p beschriebenen Kreises. Da er auch auf der geraden Linie AE liegt, so ist D somit C gegeben.

Construction.

Man errichte in B auf der Linie AB ein Perpendikel EB=BA, ziehe die gerade Linie AE, beschreibe

aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser $= p$, welche die Linie AE in D erreiche, und fälle von D auf AB das Perpendikel DC, so ist C der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis die Linie AE erreiche, muss $p < \left\{\begin{matrix} BE \\ AB \end{matrix}\right\}$ und $p \geqq BH$ seyn, wenn BH perpendikular auf AE gefällt wird.

$$\text{Nun ist } BAH = \tfrac{1}{2}R$$
$$= ABH$$

$$\text{also } AH = HB$$

$$\text{folglich } 2BH = AB^2$$

$$\text{mithin } BH^2 = \tfrac{1}{2}AB^2$$

$$\text{also muss } p^2 \geqq \tfrac{1}{2}AB^2 \text{ seyn.}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p^2 \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2}AB^2, \\ BH^2 \end{matrix}\right. \quad \text{und } p < \left\{\begin{matrix} AB \\ BE; \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } p \geqq BH$$

folglich berührt, oder schneidet den Kreis die Linie AE. Geschieht es in dem Punkte D,

$$\text{so ist } EB:BA = DC:CA$$

$$\text{mithin } DC = CA$$

$$\text{somit } DC^2 = CA^2$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} DC^2 + CB^2 \\ BD^2 \\ p^2 \end{matrix}\right\} = AC^2 + CB^2.$$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung des Kreises und der Linie AE einen einzigen Punkt auf der Linie AB im Fall des Durchschnitts einen zweiten mit der gegebenen Eigenschaft giebt. Auch bestimmt der Halbirungspunkt K der Linie AB eine kleinere Quadratsegmentensumme, als jeder andere Punkt derselben Linie, und jeder dem Punkt K näher liegende Punkt eine kleinere als der entferntere.

2. Algebr. Auflösung.

Bezeichnet man, um die Aufgabe algebraisch aufzulösen, die Linie AB mit a, die Entfernung des gesuchten Punktes C von dem Halbirungspunkt K der Linie AB mit x, so ist $BC=\frac{1}{2}a+x$, $AC=\frac{1}{2}a-x$, also soll nach den Bedingungen der Aufgabe werden

$$\left.\begin{array}{c}(\frac{1}{2}a+x)^2+(\frac{1}{2}a-x)^2\\ \frac{1}{4}a^2+ax+x^2+\frac{1}{4}a^2-ax+x^2\\ \frac{1}{2}a^2+2x^2\end{array}\right\}=p^2$$

$$\text{folglich } x^2=\frac{p^2-\frac{1}{2}a^2}{2}$$

$$\text{mithin } x=\pm\sqrt{\frac{p^2-\frac{1}{2}a^2}{2}}$$

Wird AC mit y, also CB mit $a-y$ bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{c}\text{so soll } y^2+(a-y^2)\\ y^2+2a^2-2ay+y^2\end{array}\right\}=p^2$$

$$\text{also } 2y^2-2ay=p^2-a^2$$

$$\text{folglich } y^2-ay=\frac{p^2-a^2}{2}$$

$$\text{mithin } y^2-ay+\frac{1}{4}a^2=\frac{p^2-a^2+\frac{1}{4}a^2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}p^2-\tfrac{1}{4}a^2$$
$$=\frac{p^2-\tfrac{1}{2}a^2}{2}$$

---

somit $y=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{p^2-\tfrac{1}{2}a^2}{2}}$ werden.

Die Werthe von $x=\pm\sqrt{\frac{p^2-\tfrac{1}{2}a^2}{2}}$ bezeichnen offenbar keine anderen Linien, als die Linien CK, C'K, mithin liegen die Linien in gerade entgegen gesetzter Richtung, welche die Algebra durch die Zeichen $\pm$ unterscheidet.

Zusatz.

Die Werthe von $y=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{p^2-\tfrac{1}{2}a^2}{2}}$, welche beide positiv sind, bezeichnen die Linien AC, AC', also liegen die mit dem Zeichen + behafteten Linien in einerley Richtung.

Aufgabe III. (Fig. 3.)

Durch einen gegebenen Kreis FEM eine gerade Linie FEH, einer gegebenen geraden Linie BA parrallel, zu ziehen, dass die Sehne FE zu dem zwischen dem Punkte E und der gegebenen geraden Linie AC liegenden Segmente EH in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehe.

Algebr. Auflösung.

Es sey FEH die gesuchte Linie, sey von des Kreises Mittelpunkte K ein Perpendikel KB auf die Linie AB gefällt, welches der Linie AC in C begegne, und sey CE gezogen, welche in ihrer Verlängerung der Linie AB in D begegne,

so ist $\left.\begin{matrix} GE:EH \\ BD:DA \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \frac{1}{2}FE:EH \\ \frac{1}{2}p:q \end{matrix}$

---

also $\left.\begin{matrix} BD+DA \\ AB \\ a \end{matrix}\right\}:BD = \frac{1}{2}p+q:\frac{1}{2}p$, wenn AB=a gesetzt wird,

---

also $BD = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p+q}a$

$= d$ zur Abkürzung.

Nun ist $CG:GE = CB:BD$

---

folglich $CG^2:GE^2 = CB^2:BD^2$

d. i. $(b+x)^2:r^2-x^2 = c^2:d^2$, wenn $CK=b$, $KE=r$, $CB=c$, $KG=x$ gesetzt wird.

---

mithin $r^2-x^2 = \frac{d^2}{c^2}(b+x)^2$

$= \frac{d^2}{c^2}(b^2+2bx+x^2)$

---

somit $r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2 = x^2+\frac{d^2}{c^2}x^2+2b\frac{d^2}{c^2}x$

$= \frac{c^2+d^2}{c^2}x^2+2b\frac{d^2}{c^2}x$

---

demnach $\frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right) = x^2+2b\frac{d^2}{c^2+d^2}x$

---

also $x^2+2b\frac{d^2}{c^2+d^2}x+b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2} = b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right)$

---

folglich $x = -b\frac{d^2}{c^2+d^2} \pm \sqrt{b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\left(r^2-\frac{d^2}{c^2}b^2\right)}$

Zusatz 1.

Die Werthe von x sind nur dann möglich,

$$\text{wenn } b^2\frac{d^4}{(c^2+d^2)^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}r^2 \overset{=}{>} \begin{cases}\dfrac{c^2}{c^2+d^2}\dfrac{d^2}{c^2}b^2\\[2ex] \dfrac{d^2}{c^2+d^2}\,b^2\end{cases}$$

$$\text{mithin } b^2\frac{d^4}{c^2+d^2}+c^2r^2 \overset{=}{>} d^2b^2$$

$$\text{demnach } c^2r^2 \overset{=}{>} \begin{cases}d^2b^2\left(1-\dfrac{d^2}{c^2+d^2}\right)\\[2ex] \dfrac{d^2b^2c^2}{c^2+d^2}\end{cases}$$

$$\text{somit } r^2 \overset{=}{>} \frac{d^2b^2}{c^2+d^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{also } r^2:b^2\\ \text{d. i. } MK^2:KC^2\\ \\ BL^2:LC^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \begin{cases}d^2:c^2+d^2\\ BD^2:DC^2\end{cases}$$

$BD^2:DC^2$, wenn die Tangente CM an den Kreis gelegt wird;

$BL^2:LC^2$, wenn man die Tangente bis zum Durchschnitt mit AB verlängert;

$$\text{folglich } BL^2:\begin{Bmatrix}LC^2-BL^2\\ CB^2\end{Bmatrix} \overset{=}{>} BD^2:\begin{Bmatrix}DC^2-BD^2\\ CB^2\end{Bmatrix}$$

$$\text{mithin } LB \overset{=}{>} \begin{cases}BD\\[1ex] \dfrac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p+q}\,a\end{cases}$$

$$\text{somit } \begin{Bmatrix}a\\ AB\end{Bmatrix} : LB \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}p+q:\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}AB-BL\\ AL\end{matrix}\right\} : LB \leqq q:\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{also } AL:2LB \leqq q:p$$

$$\text{folglich } p:q \leqq 2BL:LA.$$

Zusatz 2.

Von den Werthen von x ist der eine immer negativ, der andere wird positiv, oder $=0$, oder negativ, je nachdem

$$r^2 \gtreqless \frac{d^2}{c^2}b^2$$

$$\text{also } r \gtreqless \frac{d}{c}b$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}r:b\\ OK:KC\\ \\ \\ NB:BC\end{matrix}\right\} \gtreqless \left\{\begin{matrix}d:c\\ DB:BC\end{matrix}\right.$$

, wenn OK ein auf CK perpendikular stehender Halbmesser ist; wenn die Verlängerung von CO der Linie AB in N begegnet;

$$\text{mithin } NB \gtreqless BD$$

$$\text{somit } AB:BN \lesseqgtr \left\{\begin{matrix}AB:BD\\ \tfrac{1}{2}p+q:\tfrac{1}{2}p\end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}AB-BN\\AN\end{matrix}\right\}:NB \overset{<}{\underset{>}{=}} q:\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{also } AN:2NB \overset{<}{\underset{>}{=}} q:p$$

$$\text{folglich } p:q \overset{<}{\underset{>}{=}} 2BN:NA.$$

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey FH die gesuchte Linie, so ist, die vorige Vorbereitung und Bezeichnung vorausgesetzt,

$$\begin{aligned} BD:DA &= GE:EH \\ &= \tfrac{1}{2}FE:EH \\ &= \tfrac{1}{2}p:q \end{aligned}$$

also ist, da die gerade Linie AB gegeben ist, der Punkt D, somit die gerade Linie CB gegeben.

Construction.

Man fälle von dem Mittelpunkte K des gegebenen Kreises das Perpendikel KB auf die Linie AB, verlängere dasselbe bis zum Durchsehnitt mit der Linie AC, theile AB in D in dem Verhältnisse von $\tfrac{1}{2}p:q$, verknüpfe die Punkte C, D durch die gerade Linie DC, welche dem Kreise in E begegne, und lege durch E die Linie FH der Linie AB parallel, so ist dieselbe die gesuchte.

Determination.

Damit CD den Kreis erreiche, muss, wenn CL den Kreis in M berührt,

$$DB \underset{<}{=} BL \text{ seyn}$$

$$\text{also } DB:BA \leqq LB:BA$$

$$\text{folglich } \underbrace{DB:\left\{\frac{AB-BD}{DA}\right\}}_{\frac{1}{2}p:q} \leqq LD:\left\{\frac{AB-BL}{LA}\right\}$$

$$\text{mithin } p:q \leqq 2\,BL:LA.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p:q \leqq 2\,BL:LA$$

---

also $DB \leqq BL$, wie aus der Determination hervorgeht; mithin erreicht die Linie CD den Kreis in einem Punkte E. Und es ist

$$GE:EH = BD:DN$$
$$= \tfrac{1}{2}p:q$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}2\,GE\\ FE\end{matrix}\right\}:EH = p:q.$$

Zusatz 1.

Die gerade Linie berührt, oder schneidet den Kreis, je nachdem $DB \leqq BL$, also $p:q \leqq 2\,BL:LA$. Es giebt also eine einzige Auflösung, oder eine zweite durch die Linie $F'G'E'H'$.

Zusatz 2.

Der Punkt G fällt auf die Verlängerung von CK, oder in K, oder auf CK selbst, je nachdem, wenn KO ein auf CK perpendicular stehender Radius und die gerade Linie CON gezogen ist, $BD \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} BN$,

also $DB:BA \substack{<\\=\\>} NB:BA$ ist,

---

folglich $$\left.\begin{matrix} BD:\left\{\begin{matrix}AB-BD\\DA\end{matrix}\right\} \\ \tfrac{1}{2}p:q\end{matrix}\right\} \substack{<\\=\\>} NB:\left\{\begin{matrix}AB-BN\\AN\end{matrix}\right.$$

---

somit $p:q \substack{<\\=\\>} 2\,BN:NA.$

Zusatz 3.

Die Geometrie construirt eine Linie, oder zwey mit der gegebenen Eigenschaft, wenn die Algebra einen Werth, oder zwey für die unbekannte Linie darlegt.

Zusatz 4.

Die Geometrie legt den Punkt G auf die Verlängegerung von CK, in den Punkt K, zwischen die Punkte C, K, je nachdem die Algebra den Werth von KG positiv, $=0$, oder negativ bestimmt.

Zusatz 5.

Der von der Algebra unter allen Umständen negativ gefundene Werth von x wird von der Geometrie immer in die entgegengesetzte Richtung mit demjenigen, welchen die Algebra positiv nennt, gelegt.

Aufgabe IV.

In ein gegebenes Dreieck ABC ein Rechteck DEFG zu legen, dessen Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden a gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Es sey DEFG das gesuchte Rectangel, so ist, wenn AH perpendikular auf BC gefällt wird,

$$BD:DG = BA:AH$$
$$AD:DE = AB:BC$$

$$\text{also } AD.DB:ED.DG = AB^2:\begin{cases} AH.BC \\ AB.CO \end{cases}$$
$$= AB:CO$$

Ist P der Halbirungspunkt von AB, und setzt man $PD = x$, so ist $AD = \frac{1}{2}AB - x$, $BD = \frac{1}{2}AB + x$,

$$\text{also } AD.DB = \tfrac{1}{4}AB^2 - x^2$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{4}AB^2 - x^2 : \begin{Bmatrix} ED.DG \\ a^2 \end{Bmatrix} = AB:CO$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{4}AB^2 - x^2 = \frac{AB}{CO}a^2$$

$$\text{somit } \tfrac{1}{4}AB^2 - \frac{AB}{CO}a^2 = x^2$$

$$\text{demnach } x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 - \frac{AB}{CO}a^2}$$

Zusatz 1.

Damit die Werthe von x möglich werden,

$$\text{muss } \tfrac{1}{4}AB^2 \overset{=}{>} \frac{AB}{CO}a^2 \text{ seyn.}$$

$$\text{also } \begin{rcases} \tfrac{1}{4}AB.CO \\ \tfrac{1}{2}\triangle ABC \end{rcases} \overset{=}{>} a^2.$$

Zusatz 2.

Die Algebra zeigt eine, oder 2 Auflösungen an, je nachdem $\frac{1}{2}\triangle ABC \overset{=}{>} a^2$ ist. In dem ersten Falle fällt der Punkt D in den Punkt P, im zweiten werden die Entfernungen der Punkte D von P durch absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe von x angedeutet.

Zusatz 3.

Würde man BD=y setzen, so wäre

$$y = \frac{1}{2}\,AB \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 - \frac{AB}{CO}a^2}.$$

Man erhielte also, wenn nicht $\frac{1}{4}AB^2 = \frac{AB}{CO}a^2$, zwey einander ungleiche positive Werthe von y.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey DEFG das gesuchte Rechteck, so ist, wie oben, $AB.DB : ED.DG = AB^2 : AB.CO$. Da ED.DG, AB^2, AB.CO gegeben sind, so ist AD DB, und weil AD+DB gegeben ist, der Punkt D gegeben.

Construction.

Man fälle von C auf AB das Perpendikel CO, ziehe durch A die Linie LK#CO, die Linie CL#AB, mache RA=AL, beschreibe über BR einen die Linie AK in K schneidenden Halbkreis, nehme AQ=a, ziehe die gerade Linie KR, derselben die Linie QM parallel, lege durch den Durchschnitt M der Linie QM mit AK die Linie MN#AB, beschreibe über AB einen Halbkreis, welcher die Linie MN in N erreiche, fälle von N ein Perpendikel ND auf AB, und ziehe die Linien DG, DE den Linien AH, BC, wovon jene auf dieser perpendikular steht, parallel, mache auch EF auf BC perpendikular, so ist DEFG das gesuchte Rechteck.

Determination.

Damit der Kreis der Linie MN begegne,

muss $AM \overset{=}{<} \frac{1}{2}AB$ seyn;

also $AM^2 \overset{=}{<} \frac{1}{4}AB^2$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{array}{r} AM^2:\left\{\begin{array}{l} a^2 \\ AQ^2\end{array}\right\} \\ KA^2:AR^2 \\ AB^2:AK^2 \\ \frac{1}{4}AB^2:\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}AB.CO \\ \frac{1}{2}\triangle ABC\end{array}\right\}\end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{4}AB^2:a^2 \\ < \end{array}$$

mithin $\frac{1}{2}\triangle ABC \overset{=}{>} a^2$.

Beweis.

Es ist $\frac{1}{2}\triangle ABC \overset{=}{>} a^2$ (Det.)

also $AM \overset{=}{<} \frac{1}{2}AB$,

wie aus der Determination hervorgehet. Also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie MN. Ferner ist

$$\left.\begin{array}{r} MA^2:AQ^2 \\ AD.DB:a^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = KA^2:AR^2 \\ = BA^2:\left\{\begin{array}{l} AK^2 \\ AH.BC \end{array}\right. \\ = AD.DB:ED.DG\ \text{(Anal.)} \end{array}$$

folglich $AD.DB = a^2$.

Zusatz 1.

Die Geometrie giebt eine, oder zwey Auflösungen, je nachdem der Kreis die Linie MN berührt, oder schneidet, d. i. je nachdem $\frac{1}{2}\triangle ABC \overset{=}{>} a^2$. Im ersten Fall fällt der Punkt D in den Punkt P, im anderen fallen die Punkte D auf die beiden Seiten des Punktes P in gleichen Entfernungen von demselben.

Zusatz 2.

Die Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterscheidet, sind ohne Zweifel die auf beiden Seiten des Punktes P einander gleichen Linien PD, PD′, und beide Punkte D, D′ bestimmen eine Auflösung in dem Sinne der Aussage, jener durch das Rechteck DEFG, dieser durch das Rechteck D′E′F′G′.

Zusatz 3.

Die Linien, welche die Algebra als positive Linien bezeichnet, wie die Werthe von y = BD, BD′, werden von der Geometrie von einem Punkte aus in einerley Richtung gelegt.

Aufgabe V. (Fig. 5.)

Zwey Lichter, A, B, welche in einer Entfernung von a Fuss von einander stehen, leuchten, das eine, A, mit einer neunmal so grossen Stärke, als das andere, B. Man fragt, welcher Punkt der geraden Linie AB von beiden Lichtern gleich stark beleuchtet werde.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Entfernung des gesuchten Punktes C von A durch x, also die Entfernung desselben von B durch a—x, so muss aus optischen Gründen seyn

$$\frac{9}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2}$$

$$\text{also } 9 = \frac{x^2}{(a-x)^2}.$$

$$= \left(\frac{x}{a-x}\right)^2$$

folglich $\pm 3 = \frac{x}{a-x}$

mithin entweder $3a - 3x = x$, oder $-3a + 3x = x$

folglich entweder $3a = 4x$, oder $-3a = -2x$

somit $\frac{3}{4}a = x$, oder $\frac{3}{2}a = x$.

Würde man die Linie BC durch y, also AC durch a—y bezeichnen, so müsste die Gleichung statt finden

$$\frac{9}{(a-y)^2} = \frac{1}{y^2}$$

also $9 = \left(\frac{a-y}{y}\right)^2$

folglich $\pm 3 = \frac{a-y}{y}$

mithin entweder $3y = a - y$, oder $-3y = a - y$

also $4y = a$, oder $2y = -a$

folglich $y = \frac{1}{4}a$, oder $y = -\frac{1}{2}a$.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so wäre

$AC^2 : CB^2 = 9 : 1$

also $AC : CB$, somit der Punkt C gegeben.

Construction.

Man lege unter einem beliebigen Winkel die Linie AD an AB, nehme AD = 9, DG = 1, beschreibe über AG als Durchmesser einen Kreis, errichte in D die Sehne EE' perpendikular auf AD, nehme FD = DE, F'D = DE', ziehe die geraden Linien FB, F'B, und diesen parallel die Linie DC, DC', so sind C, C' die gesuchten Punkte.

Beweis.

$$\text{Es ist } AC : CB = AD : \begin{Bmatrix} DF \\ DE \end{Bmatrix}$$

$$\text{also } AC^2 : CB^2 = AD^2 : \begin{Bmatrix} DE^2 \\ AD.DG \end{Bmatrix}$$

$$= AD : DG$$

$$= 9 : 1.$$

$$\text{Eben so ist } AC' : CB' = AD : \begin{Bmatrix} DF' \\ DE' \end{Bmatrix}$$

$$\text{also } AC'^2 : C'B^2 = AD^2 : \begin{Bmatrix} DE'^2 \\ AD.DG \end{Bmatrix}$$

$$= AD : DG$$

$$= 9 : 1.$$

Zusatz.

Die Geometrie construirt die Linien AC, AC', welche die Algebra durch $+\frac{3}{4}a$, $+1\frac{1}{2}a$ ausdrückt, von dem Puncte A aus in einerley Richtung, hingegen die Linien BC, BC', welche die Algebra durch $+\frac{1}{4}a$, $-\frac{1}{2}a$ bezeichnet, von dem Punkte B aus in entgegengesetzten Richtungen.

Aufgabe VI. (Fig. 6.)

Auf der gegebenen geraden Linie AB, oder ihrer Verlängerung einen Punkt D zu finden, so dass AD zu der Entfernung dieses Punktes von dem Endpunkte C des in B auf der Linie AB aufgerichteten Perpendikels BC, dessen Länge gegeben ist, in dem Verhältnisse 2:1 stehe.

Algebraische Auflösung.

1. Setzt man zur Bestimmung des Punktes D die Linien $CB = b$, $BD = x$, $AB = a$, also $AD = a - x$, so erfodert die Aufgabe, dass

$$a - x = 2\sqrt{(b^2 + x^2)} \text{ werde,}$$

$$\text{also } a^2 - 2ax + x^2 = 4b^2 + 4x^2$$

$$\text{folglich } a^2 - 4b^2 = 3x^2 + 2ax$$

$$\text{mithin } \frac{a^2 - 4b^2}{3} = x^2 + \tfrac{2}{3}ax$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{r} \tfrac{1}{9}a^2 + \dfrac{a^2 - 4b^2}{3} \\ \tfrac{4}{9}a^2 - \tfrac{4}{3}b^2 \\ \tfrac{4}{9}(a^2 - 3b^2) \end{array}\right\} = (x + \tfrac{1}{3}a)^2$$

$$\text{demnach } x = -\tfrac{1}{3}a \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b^2)}.$$

Zusatz 1.

Damit der Werth von x möglich werde, muss $a^2 \geqq 3b^2$ seyn.

Zusatz 2.

Der erste Werth von x wird positiv, oder $= 0$, oder negativ, je nachdem

$$\tfrac{1}{3}a \lesseqgtr \tfrac{2}{3}\sqrt{(a^2-3b^2)}$$

$$\text{also}\quad \tfrac{1}{9}a^2 \lesseqgtr \tfrac{4}{9}a^2-\tfrac{4}{3}b^2$$

$$\text{folglich}\quad \tfrac{4}{3}b^2 \lesseqgtr \tfrac{1}{3}a^2$$

$$\text{mithin}\quad 4b^2 \lesseqgtr a^2$$

$$\text{somit}\quad 2b \lesseqgtr a \quad \text{ist.}$$

2. Setzt man $AD = y$, also $BD = a - y$, folglich $DC^2 = (a-y)^2+b^2$, so muss, damit der Aufgabe Genüge geschehe, seyn

$$y^2 = 4\big((a-y)^2+b^2\big)$$
$$= 4a^2-8ay+4y^2+4b^2$$

$$\text{demnach}\quad -4(a^2+b^2) = 3y^2-8ay$$

$$\text{also}\quad -\tfrac{4}{3}(a^2+b^2) = y^2-\tfrac{8}{3}ay$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{matrix} \tfrac{16}{9}a^2-\tfrac{4}{3}(a^2+b^2) \\ \tfrac{4}{9}a^2-\tfrac{4}{3}b^2 \\ \tfrac{4}{9}(a^2-3b^2) \end{matrix}\right\} = (y-\tfrac{4}{3}a)^2$$

mithin $\left.\begin{array}{l}\frac{4}{3}a \pm \frac{2}{3}\sqrt{(a^2-3b^2)} \\ \frac{2}{3}(2a \pm \sqrt{(a^2-3b^2)})\end{array}\right\} = y.$

Zusatz.

Beide Werthe von y sind, so lange die Aufgabe möglich ist, positiv.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey D der gesuchte Punkt, also AD : DC = 2 : 1, so ist, wenn BL der Linie DC parallel gezogen, und bis zum Durchschnitt mit der verlängerten geraden Linie DC verlängert wird,

$$\begin{aligned} AB : BL &= AD : DC \\ &= 2 : 1; \end{aligned}$$

also ist BL der Länge nach, und weil sie an die der Lage nach gegebene gerade Linie AC gezogen ist, auch der Lage nach, mithin die gerade Linie CD der Lage nach, somit der Punkt D gegeben.

Construction.

Man halbire die gerade Linie AB in M, beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = BM, und verbinde den Punkt L, in welchem der Kreis die gerade Linie AG, oder ihre Verlängerung erreicht, mit dem Punkte B durch die gerade Linie BL, so ist, wenn die gerade Linie CD der Linie BL parallel gezogen wird, der Durchschnitt D derselben mit AB, oder ihrer Verlängerung, der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis die Linie AC erreiche, muss, wenn das Perpendikel BK auf AC gefällt wird,

$$\left.\begin{matrix}BM\\ \frac{1}{2}AB\end{matrix}\right\}\begin{matrix}=\\>\end{matrix} BK \text{ seyn;}$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}AB.AC \begin{matrix}=\\>\end{matrix}\left\{\begin{matrix}AC.BK\\ AB.BC;\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } AC \overset{=}{>} 2BC$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}AC^2\\ AB^2+BC^2\end{matrix}\right\}\begin{matrix}=\\>\end{matrix} 4BC^2$$

$$\text{somit } AB^2 \overset{=}{>} 3BC^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AB^2 \overset{=}{>} 3BC^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}AB^2+BC^2\\ AC^2\end{matrix}\right\}\begin{matrix}=\\>\end{matrix} 4BC^2$$

$$\text{folglich } AC \overset{=}{>} 2BC$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{2}BA.AC \begin{matrix}=\\>\end{matrix}\left\{\begin{matrix}AB.BC\\ AC.BK\end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix}\frac{1}{2}AB\\ BM\end{matrix}\right\}\begin{matrix}=\\>\end{matrix} BK;$$

demnach berührt, oder schneidet der Kreis die Linie AC.

Geschieht es in L, so ist $AD : DC = AB : \left\{\begin{matrix} BL \\ BM \end{matrix}\right.$
$= 2 : 1.$

Zusatz 1.

Im Fall der Berührung der Linie AC durch den Kreis giebt es eine einzige Auflösung, im Fall des Scheidens zwey Auflösungen der Aufgabe.

Zusatz 2.

Ist $AB < 2BC$, also $MB < BC$, so fallen die Punkte, in welchen der Kreis mit der Linie AC zusammen kommt, zwischen A, C, also die Punkte, welche die Aufgabe auflösen, auf die Verlängerung von AB. Ist $AB = 2BC$, also $MB = BC$, so fällt der eine Durchschnitt mit C zusammen, der andere liegt zwischen A, K, also liegt der eine der gesuchten Punkte in B, der andere auf der Verlängerung von AB. Ist $AB > 2BC$, also $MB > BC$, so fällt der eine Durchschnitt auf die Verlängerung von AC, der andere auf AC, mithin liegt der eine der gesuchten Punkte zwischen A, B, der andere auf der Verlängerung von AB.

Zusatz 3.

Die Algebra und Geometrie stimmen auf das genaueste mit einander überein. Unter denselben Bedingungen, unter welchen die Algebra einen, oder zwey Werthe für die gesuchte Linie aufstellt, giebt die Geometrie eine, oder zwey Auflösungen.

Zusatz 4.

Die Geometrie construirt die geraden Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterschei-

det, in Richtungen, welche von einem Punkte aus genommen einander gerade entgegengesetzt sind. Die Linien hingegen, welchen die Algebra dasselbe Zeichen leiht, wie AD, AD′, construirt die Geometrie in derselben Richtung.

Zusatz 5.

Der negative Werth von x löset die Aufgabe in demselben Sinne auf, in welchem der positive sie auflöset.

Zusatz 6.

Die oben gefundenen Werthe von y erhält man auch dadurch, dass man die Werthe von x von a abzieht. Es ist nämlich $a - (-\frac{1}{3}a \pm \frac{2}{3}\sqrt{(a^2-3b^2)}) = \frac{4}{3}a \mp \frac{2}{3}\sqrt{(a^2-3b^2)}$. Daraus gehet hervor, dass man, um die Entfernung der Punkte A und D′ zu erhalten, wenn AB = a gesetzt, und BD′ durch das Zeichen — ausgedrückt wird, von a den Werth von BD′ abziehen, nicht aber dazu addiren muss.

Aufgabe VII. (Fig. 7.)

Eine gegebene gerade Linie AB = a in zwey Segmente AC, CB zu theilen, dass das Rechteck aus denselben dem Quadrate der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Algebr. Auflösung.

1. Es sey D der Halbirungspunkt von AB, C der gesuchte Punkt, DC = x, so muss seyn

$$\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b^2$$

$$\text{also } x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\text{folglich } x = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}.$$

2. Setzt man AC = y, so muss seyn

$$\left.\begin{matrix} y(a-y) \\ ay - y^2 \end{matrix}\right\} = b^2$$

$$\text{mithin } y^2 - ay + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\text{somit } y = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}.$$

Geometrische Behandlung.

Man beschreibe über AB einen Halbkreis, richte in dem Mittelpunkte D den Halbmesser DE perpendikular auf AB auf, nehme auf demselben DH = b, ziehe HK‡AB, und fälle von dem Durchschnitte K der Linie HK mit dem Halbkreise ein Perpendikel KC auf AB, so ist C der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit HK dem Kreise begegne, muss $b \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} DE \\ \tfrac{1}{2} AB \end{matrix}\right.$ seyn.

Beweis.

$$\text{Es ist } b \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2} AB \\ DE, \end{matrix}\right.$$

also berührt, oder schneidet die Linie HK den Kreis. Geschieht es in K, so ist $AC \cdot CB = CK^2 = DH^2 = b^2$, folglich ist C der gesuchte Punkt.

Zusatz 1.

Es giebt einen Punkt C mit den gegebenen Eigenschaften, oder einen zweiten, je nachdem der Kreis berührt, oder geschnitten wird.

Zusatz 2.

Die durch $x = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ bezeichneten Linien sind die einander gleichen Linien DC, DC'. Die durch $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ angedeuteten Linien sind AC', AC. Es liegen also die durch die Zeichen (+—) unterschiedenen Linien von einem Punkte aus in gerade entgegengesetzter, die mit dem Zeichen + behafteten in einerley Richtung.

Zusatz 3.

Es ist $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} = \frac{1}{2}a - (\mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)})$ Ist also DC' mit dem Zeichen (+), DC mit dem Zeichen (—) versehen, so erhält man den Werth von AC' nicht dadurch, dass man den Werth von DC' zu dem von AD addirt, sondern dadurch, dass man den von DC' von dem von AD abzieht.

Aufgabe VIII. (Fig. 8.)

Auf einer gegebenen geraden Linie AB einen Punkt C zu finden, dass die Entfernung desselben von dem Punkte B die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen seiner Entfernung von dem Punkte A u. der Linie AB sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey der Punkt C so gefunden,

dass $AB : BC = BC : CA$

---

so ist $BA . AC = BC^2$

also $\left.\begin{matrix}BA.AC+AB.BC\\AB^2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}BC^2+AB.BC\\(AB+BC)\,BC\end{matrix}\right.$;

folglich ist BC der Grösse nach, mithin der Punkt C gegeben.

Construction.

Man beschreibe über AB das Quadrat ABDE, halbire die Seite BD in K, beschreibe aus K als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = KA, welcher die verlängerte DB in F schneide, und mache CB = BF, so ist C der gesuchte Punkt.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } DF.FB+BK^2 &= KF^2 \text{ (El. II. 6.)} \\ &= KA^2 \\ &= AB^2+BK^2 \end{aligned}$$

folglich $\left.\begin{matrix}DF.FB\\(AB+BC)CB\end{matrix}\right\} = AB^2$

$$\begin{aligned} \text{mithin } BC^2 &= AB^2 - AB.BC \\ &= BA.AC \end{aligned}$$

somit $AB : BC = BC : CA$.

Zusatz.

Nimmt man den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises und der Verlängerung der Linie BD, so ist auch

$$\begin{aligned} DF'.F'B+DK^2 &= KF^2 \\ &= KA^2 \\ &= AB^2+BK^2 \end{aligned}$$

also $\left.\begin{matrix}DF'.F'B\\(BC'-BA)\,BC'\end{matrix}\right\} = AB^2$, wenn $C'B = BF$ gemacht wird;

folglich $BC^2 = AB^2 + AB.BC'$
$= BA.AC'$

mithin $AB:BC' = BC':C'A$;

demnach ist auch auf der Verlängerung von AB ein Punkt C' gefunden worden, welcher eine Linie BC' mit den gegebenen Eigenschaften bestimmt.

Algebr. Auflösung.

Bezeichnet man die Linie BC mit x, BA mit a, also AC mit $a-x$,

so ist $x^2 = a(a-x)$

also $a^2 + ax = a^2$

folglich $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$

mithin $x + \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{(\frac{5}{4}a^2)}$

somit $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}a^2)}$.

Zusatz 1.

Da die Werthe von x nur die Linien CB, CB' bezeichnen können, so liegt wieder der negative mit dem positiven in gerade entgegengesetzter Richtung, und die Linien FK, F'K sind die durch die Werthe $\pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ bezeichneten Linien, welche einander entgegengesetzt liegen.

Zusatz 2.

Bezeichnet man AC durch y, so erhält man, unabhängig von obiger Rechnung, die Gleichung

$ay = (a-y)^2$
$= a^2 - 2ay + y^2$

also $-a^2 = y^2 - 3ay$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}\frac{9}{4}a^2 - a^2 \\ \frac{5}{4}a^2\end{matrix}\right\} = (y - \tfrac{3}{2}a)^2$$

$$\text{mithin } y = \tfrac{3}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$= a - (-\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}.$$

Gleichwie man, um die Linie AC zu erhalten, die mit dem Zeichen (+) behaftete Linie BC $= +(-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2})$ von AB abziehen muss, so hat man, wenn den Vorschriften der Algebra Genüge geschehen soll, um die Linie AC zu erhalten, die mit dem Zeichen (—) versehene Linie BC′ von AB abzuziehen.

Anmerkung.

Um zu zeigen, dass es zu Absurditäten führe, wenn man zwey durch die Zeichen (+ —) von einander unterschiedene Linien immer in Richtungen, welche von einem Punkte aus einander gerade entgegengesetzt liegen, suchen wollte, sucht Carnot, in dem discours préliminaire der Géométrie de Position, in der Gleichung für den Kreis, $y^2 = 2ax - x^2$, den Werth von $y = \pm \sqrt{2ax - x^2}$, für $x = a$. Er findet $y = \pm a$, und fügt hinzu, dass, wenn AK $= +a$, KB $= -a$ gesetzt werden sollte, der Werth von AB $= +a + (-a) = o$ seyn müsste.

In den Zusätzen zu Aufgabe 6. 7. 8. liegt der Beweis dafür, dass, wenn KB $= -a$, AK $= +a$ gesetzt wird, der Werth von AB nicht dadurch gefunden wird, dass AK $= +a$, KB $= -a$ zu einander hinzugefügt werden, sondern dadurch, dass man sie von einander abzieht. Es ist AB $= +a - (-a) = 2a$.

Aufgabe IX. (Fig. 9.)

Einen Kreis zu beschreiben, welcher die Schenkel eines gegebenen rechten Winkels EAD, und einen aus der Spitze A der rechten Winkels, als Mittelpunkte, mit gegebenem Radius EA beschriebenen Kreis berühre.

Geometrische Auflösung.

Analysis.

Es sey O der Mittelpunkt, OC der Radius des gesuchten Kreises, so ist, wenn man die Perpendikel OC; OB auf die Schenkel AB, AC fällt; BO = OC, also halbirt AO den Winkel BAC, mithin ist AO der Lage nach gegeben. Ferner ist wegen der gegebenen Winkel des Dreieckes AOC dieses Dreieck der Art nach gegeben, also AO : $\begin{cases} OC \\ OG \end{cases}$ gegeben, folglich, da AG der Lage und Grösse nach gegeben ist, der Punkt O, somit der Radius OC gegeben.

Construction.

Man halbire den Winkel DAE durch den Radius AG, fälle von G ein Perpendikel GH auf den Schenkel AE, und ziehe den Endpunkt D des anderen Schenkels mit H durch eine gerade Linie zusammen, so ist der Durchschnitt O der Linien AG u. DH der Mittelpunkt, und das auf AE gefällte Perpendikel OC der Radius des gesuchten Kreises.

Beweis.

Da O auf der Halbirungslinie des Winkels DAE liegt, so ist OAC = OAB, also ist BO = OC, wenn OB; OC Perpendikel auf AB; AC sind, und der Kreis berührt die Schenkel in B, C.

$$\text{Da } AO:OC = \left\{\begin{matrix}AG\\AD\end{matrix}\right\}:GH = AO:OG$$

so ist $OC = OG$;

mithin lauft der Kreis, welcher O zum Mittelpunkte hat, durch G, und berührt in G den gegebenen Kreis.

Zusatz.

Zieht man den anderen Endpunkt K des Durchmessers DK des gegebenen Kreises mit H durch die gerade Linie KH zusammen, und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte O' mit der verlängerten AG, so ist auch O' der Mittelpunkt, und O'C' oder O'B', wenn diese Linien auf den Schenkeln des gegebenen Winkels perpendikular stehen, der Radius eines, jene Schenkel in B, C, und den gegebenen Kreis in G berührenden, Kreises, wie von selbst erhellet.

Algebraische Auflösung.

Es sey $\left.\begin{matrix}GO\\OC\end{matrix}\right\} = x$

so ist $AO^2 = 2x^2$

also $AO = \sqrt{2x^2}$

folglich $\sqrt{2x^2} + x = AG$

$= r$, wenn der Radius $= r$ gesetzt wird;

mithin $\sqrt{2x^2} = r - x$

somit $2x^2 = r^2 - 2rx + x^2$

demnach $x^2 + 2rx = r^2$

$x(x+2r) = r^2$ $\frac{x}{r}(x+2r) = r$

also $x^2+2rx+r^2 = 2r^2$

$$\text{folglich } x = -r \pm \sqrt{2r^2} = -r \pm r\sqrt{2} = r(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Zusatz 1.

Es hat x zwey Werthe, indem x entweder $= +r(-1 + \sqrt{2})$ oder $= -r(1+\sqrt{2})$ ist, wovon jener Werth den oben gefundenen Radius GO, dieser den Radius GO′ bezeichnet. Beide liegen einander entgegengesetzt, gleich wie die Algebra ihnen die entgegengesetzten Zeichen beilegt, und beide lösen die Aufgabe im Sinne der Aussage auf. Ein Beweis, wie nothwendig es ist, die negativen Werthe der Wurzeln nicht ausser Acht zu lassen.

Zusatz 2.

Setzt man $AO = y$, also $OC^2 = \frac{1}{2}y^2$

folglich $\left.\begin{matrix}OC\\OG\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}y^2}$

mithin $\left.\begin{matrix}AO+OG\\r\end{matrix}\right\} = y + \sqrt{\frac{1}{2}y^2}$

somit $\left.\begin{matrix}(r-y)^2\\r^2-2ry+y^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}y^2$

demnach $2r^2 - 4ry + 2y^2 = y^2$

also $y^2 - 4ry + r^2 = 2r^2$

$$\text{folglich } y = 2r \pm \sqrt{2r^2} = r(2 \pm \sqrt{2});$$

mithin hat y zwey positive Werthe, wodurch die Linien AO, AO′ bezeichnet werden. Ein Beweis, dass Linien,

welche von einem Punkte aus auf einer geraden Linie in einerley Richtung liegen, von der Algebra mit einerley Zeichen versehen werden.

Aufgabe X. (Fig. 10.)

Von der Spitze B des gegebenen Dreieckes ABC eine gerade Linie BE zur Grundlinie AC zu ziehen, welche die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten AE, EC der Grundlinie werde.

Algebraische Auflösung.

Fällt man auf die Grundlinie das Perpendikel BD, und setzt man $BD = h$, das grössere Segment $AD = a$, $CD = b$, $DE = x$, also $AE = a + x$, $CE = b - x$, so muss, weil $AE : EB = BE : EC$, also $AE.EC = BE^2$ werden soll, die Gleichung statt finden

$$\left.\begin{array}{l}(a+x)(b-x)\\ ab+bx-ax-x^2\end{array}\right\} = h^2+x^2$$

$$\text{folglich } ab-h^2 = 2x^2+(a-b)x$$

$$\text{mithin } \frac{ab-h^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{16} = \left(x+\frac{a-b}{4}\right)^2$$

$$\text{somit } x = -\frac{a-b}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2}{16}+\frac{ab-h^2}{2}\right)}$$

$$= -\frac{a-b}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{(a-b^2)}{16}+\frac{8(ab-h^2)}{16}\right)}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)^2+8(ab-h^2))}}{4}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)^2-8(h^2-ab))}}{4}$$

Zusatz 1.

Die Werthe von x werden real, wenn $ab \geqq h^2$, d. h. wenn das Dreieck an der Spitze einen rechten, oder einen stumpfen Winkel hat. Damit der Werth von x auch dann real werde, wenn der Winkel an der Spitze ein spitzer ist, muss $(a-b)^2 \geqq 8(h^2-ab)$ seyn.

$$\text{also } \left. \begin{matrix} (a-b)^2 + 8ab \\ (a+b)^2 + \left\{ \begin{matrix} 4ab \\ (a+b^2)-(a-b)^2 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \geqq 8h^2$$

$$\text{somit } 2(a+b)^2 \geqq 8h^2 + (a-b)^2.$$

Zusatz 2.

Der obere Werth von x ist positiv, oder $= 0$, oder negativ, je nachdem $ab \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} h^2$, d. h., je nachdem das Dreieck an der Spitze einen stumpfen, einen rechten, oder einen spitzen Winkel hat. Der untere Werth von x ist unter allen Umständen negativ.

Zusatz 3.

Den Werth von AE erhält man, wenn man zu $AD = a$ den Werth von x addirt. Es ist also

$$AE = a + \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b^2)-(8h^2-ab))}}{4}$$

$$= \frac{4a-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)^2-8(h^2-ab))}}{4}$$

welche Werthe positiv sind.

Zusatz 4.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Da } BD:DE \\ h:x\end{array}\right\} = 1 : \tan . EBD,$$

$$\text{so ist } \tan . EBD = \frac{x}{h}$$

$$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{((a-b)-8(h^2-ab))}}{4h}$$

Es hat also tan.EBD, wie x, zwey einander ungleiche Werthe, wovon der obere mit x positiv, = 0, oder negativ wird, der untere immer negativ ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BE die gesuchte Linie,

so ist $BE^2 = AE.EC$

$= BE.EF$, wenn um das Dreieck ABG ein Kreis beschrieben, und BE bis zum Durchschnitte mit demselben in F verlängert wird, also ist auch BE = EF Verlängert man das Perpendikel BD bis zum Durchschnitte K mit einer durch F der Linie AC parallel gelegten Linie FK, so ist BD:DK=BE:EF, folglich auch BD = DK, mithin ist der Punkt K, somit der Punkt F, als Durchschnitt der durch K mit AC parallel gelegten Linie KF mit dem um das Dreieck gelegten Kreise, und die gerade Linie BEF gegeben.

Construction.

Man beschreibe um das Dreieck einen Kreis, falle von der Spitze B auf die Grundlinie das Perpendikel BD, verlängere dasselbe über D hinaus um KD = DB, lege durch K die Linie KF der Linie AC parallel, und verbinde den Durchschnitt F derselben und des Kreises mit dem Punkte B durch die gerade Linie BF, welche die Grundlinie in E schneide, so ist BE die gesuchte Linie.

Determination.

Hat das Dreieck bey B einen spitzen Winkel, so liegt der Punkt K ausserhalb des Kreises, also muss, damit KF dem Kreise begegne, KD $\overset{=}{<}$ LM seyn, wenn AL = LC gemacht, und LM auf AC perpendikular aufgerichtet, auch bis zum Durchschnitte mit dem Kreise verlängert worden ist.

$$\text{Nun ist } \left.\begin{matrix} AL \\ \frac{a+b}{2} \end{matrix}\right\} : LM = 1 : \left\{\begin{matrix} \tan. CAM \\ \tan. \frac{1}{2} ABC \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } LM = \tfrac{1}{2}(a+b)\tan.\tfrac{1}{2} ABC.$$

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix} BD:DA \\ h:a \end{matrix}\right\} = 1 : \tan. ABD, \quad \left.\begin{matrix} BD:DC \\ h:b \end{matrix}\right\} = 1 : \tan. CBD$$

$$\text{folglich } \tan. ABD = \frac{a}{h}, \quad \tan. CBD = \frac{b}{h}$$

$$\text{somit } \tan. ABD . \tan. CBD = \frac{a.b}{h^2};$$

$$\text{demnach } \tan. ABC\,(= \tan.(ABD + CBD)) = \frac{\frac{a}{h} + \frac{b}{h}}{1 - \frac{ab}{h^2}}$$

$$= \frac{(a+b)\,h}{h^2 - ab}$$

$$\text{mithin } (\tan. ABC)^2 = \frac{(a+b)^2 h^2}{(h^2 - ab)^2}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} 1 + (\tan. ABC)^2 \\ (\sec. ABC)^2 \end{matrix}\right\} = \frac{(h^2 - ab)^2 + (a+b)^2 h^2}{(h^2 - ab)^2}$$

$$\text{folglich } \sec. ABC - 1 = \frac{\sqrt{((h^2 - ab)^2 + (a+b)^2 h^2)} - (h^2 - ab)}{h^2 - ab}$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{c}\frac{\sec.ABC-1}{\tan.ABC}\\ \tan.\frac{1}{2}ABC\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{(a+b)h}$$

$$\text{som.}\ \left.\begin{array}{c}\frac{1}{2}(a+b)\tan.\frac{1}{2}ABC\\ LM\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{2h}$$

$$\text{demnach muss seyn}\ h \underset{<}{=} \frac{\sqrt{((h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2)}-(h^2-ab)}{2h}$$

$$\text{also}\ 2h^2+h^2-ab \underset{<}{=} \sqrt{((h^2-ab)^2)+(a+b)^2h^2}$$

$$\text{folglich}\ 4h^4+4h^2(h^2-ab)+(h^2-ab)^2 \underset{<}{=} (h^2-ab)^2+(a+b)^2h^2$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{array}{l}4h^2+4(h^2-ab)\\ 8h^2-\left\{\begin{array}{c}4ab\\ (a+b)^2-(a-b)^2\end{array}\right\}\end{array}\right\} \underset{<}{=} (a+b)^2$$

$$\text{demnach}\ 8h^2+(a-b)^2 \underset{<}{=} 2(a+b)^2.$$

Beweis.

Wenn der Winkel ABC grösser, als ein rechter Winkel, oder einem rechten gleich ist, so fällt der Punkt K innerhalb des Kreises, oder auf den Umfang, also erreicht die Linie KF den Umfang. Ist der Winkel ABC kleiner, als ein rechter, so ist, vermöge der Determination, $8h^2+(a-b)^2 \underset{<}{=} 2(a+b)^2$, also ist, wie leicht erhellet, DK $\underset{<}{=}$ LM, mithin erreicht der Kreis die Linie KF. Geschieht es in F,

so ist $BE:EF = BD:DK$

$$\text{folglich } BE = EF$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} BE \,.\, EF \\ AE \,.\, EC \end{matrix}\right\} = BE^2$$

$$\text{also } AE : EB = BE : EC.$$

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn ABC>R (Fig. 10. a.), zwey Durchschnittspunkte F, F' auf verschiedenen Seiten der Linie DK, dass es, wenn ABC= R (Fig. 10. b.), zwey Durchschnittspunkte giebt, wovon der eine im Durchschnitt K liegt, der andere, F', der Endpunkt eines Durchmessers ist, dass es, wenn ABC<R (Fig. 10. c.), zwey Durchschnittspunkte F, F' giebt, welche auf einerley Seite von DK liegen.

Zusatz 2.

Der Punkt E fällt auf die Verlängerung von AD, in D, zwischen D, A, je nachdem der Werth von x positiv, = 0, oder negativ wird. Die Werthe von y liegen sämmtlich von A aus auf AC in derselben Richtung.

Zusatz 3.

Die Tangenten, welche mit dem negativen Zeichen versehen sind, bezeichnen Winkel, welche auf der anderen Seite der Linie BD liegen, als wo die Winkel gefunden werden, deren Tangenten das positive Zeichen vor sich haben.

Aufgabe XI. (Fig. 11.)

Zwischen die Katheten eines gegebenen rechtwinkligen Dreieckes ABC eine gerade Linie FG, welche

der gegebenen geraden Linie b gleich sey, und von der Hypotenuse BC in M halbirt werde, zu legen.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey FG die gesuchte Linie, so liegt, weil FAG = R, der Punkt A auf dem Umfange eines über FG beschriebenen Halbkreises, also ist die gerade Linie AM = MG = $\frac{1}{2}$ b, folglich liegt der Punkt M auf dem Umfange eines aus A als Mittelpunkte mit einem Radius = $\frac{1}{2}$ b beschriebenen Kreises, ist mithin, weil er auch auf der Hypotenuse BC liegt, gegeben.

Construction.

Man beschreibe einen Kreis, welcher in A den Mittelpunkt, und eine Linie = $\frac{1}{2}$ b zum Radius habe, und die Hypotenuse BC in M erreiche, beschreibe aus M als Mittelpunkte einen Kreis, welcher die gerade Linie MA zum Halbmesser habe, und die Kathete AC in G erreiche, ziehe die gerade Linie GM, und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte F mit der verlängerten AB, so ist GF die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der Kreis, welcher A zum Mittelpunkte hat, die Linie BC erreiche, muss $\frac{1}{2}$ b $\overline{\overline{>}}$ AL seyn, wenn AL perpendikular auf BC gefällt wird.

Beweis.

Es ist $\frac{1}{2}$ b $\overline{\overline{>}}$ AL, also erreicht der aus A als Mittelpunkte beschriebene Kreis die Linie BC. Geschieht es in B, so mache man FB = BA, und FA ist die gesuchte Linie, wie sich von selbst ergiebt. Geschieht

es in C, so mache man GC = CA, und es ist GA die gesuchte Linie, wie von selbst erhellet. Geschieht es in einem anderen Punkte M, so fälle man auf AC das Perpendikel MK, welches kleiner ist, als MA; mithin schneidet der Kreis, welcher M zum Mittelpunkte hat, die Linie AC in einem Punkte G, und die gerade Linie GM schneidet in ihrer Verlängerung die Linie AB in der Verlängerung, so dass

$$GM : MF = GK : KA$$

$$\text{also } GM = MF$$

$$\text{folglich } FG = 2GM$$
$$= b \text{ ist.}$$

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn $\frac{1}{2}b = AL$, eine einzige, in allen andern Fällen eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt. Uebrigens kann, je nachdem die Linie b beschaffen ist, jeder der Punkte M zwischen B, C, oder der eine in B, der andere zwischen B, C, oder der eine in C, der andere auf der verlängerten CB, oder der eine zwischen B, C, der andere auf der Verlängerung von BC, oder es können beide auf der Verlängerung von BC liegen.

Algebr. Auflösung.

Setzt man BM=x, so ist $x : \frac{1}{2}b = \sin.F : \sin.B$
$= \cos.G : \cos.C$

also $x^2 : \frac{1}{4}b^2 = \overline{\cos.G}^2 : \overline{\cos.C}^2$.

Setzt man BC=a, so ist $a - x : \frac{1}{2}b = \sin.G : \sin.C$

folglich $(a-x)^2 : \frac{1}{4}b^2 = \left\{ \frac{\sin.G}{1-\overline{\cos.G}^2} \right\}^2 : \overline{\sin.C}^2$

mithin $(a-x)^2 \overline{\sin.C}^2 = \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} b^2 \overline{\cos.G}^2$

somit $\overline{\cos.G}^2 = \dfrac{\frac{1}{4} b^2 - (a-x)^2 \overline{\sin.C}^2}{\frac{1}{4} b^2}$

demnach $x^2 : \frac{1}{4} b^2 = \dfrac{\frac{1}{4} b^2 - (a-x)^2 \overline{\sin.C}^2}{\frac{1}{4} b^2} : \overline{\cos.C}^2$

also $x^2 \overline{\cos.C}^2 = \frac{1}{4} b^2 - (a^2 - 2ax + x^2) \overline{\sin.C}^2$

folgl. $\left.\begin{matrix} x^2(\overline{\sin.C}^2 + \overline{\cos.C}^2) \\ x^2 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2ax \overline{\sin.C}^2 \\ \\ 2cx \sin.C \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4} b^2 - \left\{\begin{matrix} a^2 \overline{\sin.C}^2 \\ AB^2 \\ c^2, \end{matrix}\right.$ wenn AB $= c$ gesetzt wird;

mithin $(x - c \sin.C)^2 = \frac{1}{4} b^2 - c^2 + c^2 \overline{\sin.C}^2$

$= \frac{1}{4} b^2 - \left\{\begin{matrix} c^2 (1 - \overline{\sin.C}^2) \\ c^2 \overline{\cos.C}^2 \\ c^2 \overline{\sin.B}^2 \\ AL^2 \end{matrix}\right.$

somit $x = \left\{\begin{matrix} c \sin.C \\ c \cos.B \\ BL \end{matrix}\right\} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} b^2 - AL^2)}$

Zusatz 1.

Es erhellet aus diesem Ausdruck, dass x zwey Werthe erhält, wovon der eine immer positiv ist, gleichwie die geometrische Construction immer einen Punkt M auf der Linie BC, oder ihrer Verlängerung über C hinaus, nachweiset, dass beide einander gleich

und $= BL$ werden, wenn $\frac{1}{4}b^2 = AL^2$, also $\frac{1}{2}b = AL$ ist, dass der eine, welcher immer positiv ist, $\overset{<}{\underset{>}{=}} BC$ wird, jenachdem

$$BL + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)} \overset{<}{\underset{>}{=}} BC \text{ ist,}$$

$$\text{also } \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)} \overset{<}{\underset{>}{=}} \left\{ \begin{matrix} CB - BL \\ CL \end{matrix} \right.$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} CL^2$$

$$\text{mithin } \tfrac{1}{4}b^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} \left\{ \begin{matrix} AL^2 + LC^2 \\ AC^2 \end{matrix} \right.$$

$$\text{somit } \tfrac{1}{2}b \overset{<}{\underset{>}{=}} AC$$

$$\text{demnach } b \overset{<}{\underset{>}{=}} 2\,AC;$$

dass der andere positiv, $= o$, oder negativ wird, je nachdem

$$BL \overset{>}{\underset{<}{=}} \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$

$$\text{also } BL^2 \overset{>}{\underset{>}{=}} \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} BL^2 + LA^2 \\ BA^2 \\ c^2 \end{matrix} \right\} \overset{>}{\underset{<}{=}} \tfrac{1}{4}b^2$$

negativ, je nachdem $AL^4 \gtreqless BL(\frac{1}{4}b^2 - AL^2)$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} \frac{AL^2}{BL} \\ LC \end{matrix}\right\} \gtreqless \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$

$$\text{folglich } LC^2 \gtreqless \tfrac{1}{4}b^2 - AL^2$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} LC^2 + AL^2 \\ AC^2 \end{matrix}\right\} \gtreqless \tfrac{1}{4}b^2$$

$$\text{somit } AC \gtreqless \tfrac{1}{2}b$$

$$\text{demnach } 2AC \gtreqless b;$$

gleichwie die geometrische Cosntruction für dieselben Fälle einen Punkt M zwischen B, C, oder in C, oder auf der Verlängerung von BC über C hinaus, also auch den Fusspunkt des durch diesen Punkt M auf BA, oder ihre Verlängerung bestimmten Perpendikels nachweiset.

Zusatz 6.

Setzt man $AF = u$, so ist $u = 2y$, weil $AF = 2AQ$, wegen $AM = MF$, mithin ist $u = \frac{2(AL^2 \mp BL\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - AL^2})}{c}$.
Es hat also u gleichfalls zwey Werthe, wovon der eine immer positiv ist, der andere mit y positiv, $= 0$, und negativ wird, jenachdem

$$AL^2 \gtreqless EL \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - AL^2)}$$

$$\text{also } 2AC \gtreqless b.$$

Anmerkung.

Carnot sagt in der Géométrie de Position pag. 357. bey der Auflösung der Aufgabe: »zwischen die Richtungen der Katheten eines gegebenen rechtwinkeligen »Dreieckes eine gerade Linie von gegebener Länge zu »legen, welche durch die Hypotenuse halbirt werde«, dass man für die Linie BM immer zwey positive Werthe, fur die Linie AF immer einen positiven, und einen negativen Werth erhalte. Aus dem Vorstehenden gehet hervor, dass das unrichtig ist, indem $x =$ BM einen positiven und einen negativen Werth erhalten kann, und beide Werthe von u positiv werden können, oder der eine positiv, der andere $=0$, der eine positiv, der andere negativ werden kann.

Er behauptet ferner, niemals löse ein negativer Werth einer gesuchten Grösse eine Aufgabe in demselben Sinne auf, wie der positive, und die durch den negativen Werth der gesuchten Grösse bestimmte Auflösung könne also niemals als eine zweite Auflösung derselben Aufgabe angesehen werden.

Das Vorstehende zeigt, dass die negativen Werthe der gesuchten Linien geradezu und in demselben Sinne die Aufgabe auflösen, wie die positiven, wenn die Aufgabe nur in der Allgemeinheit aufgefasst wird, in welcher die Algebra sie auffasst, und dass die negativen Werthe die zweiten Auflösungen der vorgelegten

Aufgabe sind. Es giebt unzählige Beispiele, in welchen dieselben eine Aufgabe in allen Beziehungen in demselben Sinne auflösen, wie die positiven, und die bisher behandelten Aufgaben sind eben so viele Beweise für diese Behauptung.

Carnot behauptet ferner, dass nur zufällig in dem vorliegenden Falle der negative Werth von u eine in entgegengesetzter Richtung mit der durch den posit. Werth von u angezeigten Linie liegende Linie anzeige, dass die mit dem negativen Zeichen behafteten Linien bald mit den positiven in entgegengesetzter Richtung, bald unter schiefen Winkeln gegen dieselben geneigt, bald in derselben Richtung mit ihnen lägen, und dass es darüber gar keine feste Regel gebe. Es ist ein Hauptzweck dieser Schrift zu zeigen, dass alle diese Behauptungen falsch sind, dass namentlich durch das negative Zeichen angedeutete Linien niemals anders, als in entgegengesetzter Richtung mit den durch das positive Zeichen angegebenen liegen, dass jede mit dem negativen Zeichen behaftete Linie eine solche Lage anzeige, dass Linien, welche gegen andere unter irgend welchen Winkeln geneigt sind, von denselben nie durch die Zeichen + — unterschieden werden, dass endlich Linien, welche in einerley Richtung liegen, immer und überall dasselbe Zeichen vor sich haben.

Aufgabe XII. (Fig. 12. a. b.)

Auf dem gegebenen Kreisdurchmesser AB von dem gegebenen Punkte C aus eine Linie CQ abzuschneiden, dass, wenn von dem Punkte B an einen über CQ als Durchmesser beschriebenen Kreis eine Tangente BF gezogen, und dieselbe bis zum Durchschnitte G mit

dem Umfange des über AB liegenden Kreises verlangert wird, das Segment FG der Linie AC gleich werde.

In meinen geometrischen Aufgaben, Berlin 1825 und Elberfeld 1828, finden sich folgende Constructionen dieser Aufgabe mit hinzugefügten Beweisen.

Erste Construction. (Fig. 12. a.)

Man halbire den halben Kreisumfang AHB in H; ziehe die gerade Linie AH, beschreibe aus H als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Halbmesser = AH; welcher dem in C auf AC aufgerichteten Perpendikel in E begegne, ziehe die gerade Linie HE, welche den Kreis in K schneide, verbinde die Punkte K, A durch die gerade Linie AK, fälle auf dieselbe das, den Durchmesser AB in D schneidende, Perpendikel EL; beschreibe aus D als Mittelpunkte mit einem Radius = DC einen Kreis, und ziehe an denselben die Tangente BF; so leistet dieselbe das Verlangte.

Zusatz.

Nimmt man den zweiten Durchschnitt E' des aus H als Mittelpunkte beschriebenen Kreises mit dem Perpendikel CE, zieht die den Kreis in K' schneidende gerade Linie HE', verbindet die Punkte K', A durch die gerade Linie AK', fällt auf die Verlängerung derselben das, den verlängerten Durchmesser in D' schneidende, Perpendikel E'L', beschreibt aus D' als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = D'C, und zieht an denselben die Tangente BF', so leistet auch diese das Verlangte, wie von selbst erhellet.

Zweite Construction. (Fig. 12. b.)

Man errichte in C das Perpendikel MC auf AB; mache dasselbe = CA, halbire den Winkel ACM durch

die den Kreis in N schneidende gerade Linie CN, ziehe die, denselben Kreis in G erreichende, gerade Linie NM, errichte in dem Halbirungspunkte O der Linie GM ein Perpendikel auf GM, welches dem Diameter in D begegne, beschreibe aus D als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = DC, und ziehe die gerade Linie BG, so hat dieselbe die gegebene Eigenschaft.

Zusatz.

Bezeichnet man den zweiten Durchschnitt der Linie CN und des Kreises mit N′, zieht die den Kreis in G′ erreichende gerade Linie N′M, errichtet in dem Halbirungspunkte O′ der Linie G′M′ ein Perpendikel auf G′M′, welches dem verlängerten Diameter in D′ begegne, beschreibt aus D′ als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = D′C, und zieht die gerade Linie BG′, so hat auch diese die gegebene Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Algebr. Auflösung.

Man setze $AC = FG = a$, $BC = b$, $CD = x$, also $DB = b - x$, $BQ = b - 2x$, $AD = a + x$. Nun ist, wenn die Linien AG, DF gezogen werden,

$$DF \# AG$$

$$\text{also } BF : FG = BD : DA$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} BF^2 \\ CB \,.\, BQ \end{matrix}\right\} : FG^2 = BD^2 : DA^2$$

$$\text{d. i. } b(b-2x) : a^2 = (b-x)^2 : (a+x)^2$$

$$= b^2 - 2bx + x^2 : a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{mithin } b^2 - 2bx - a^2 : a^2 = b^2 - a^2 - 2(a+b)x : a^2 + 2ax + x^2$$

$$\text{somit } (b^2-a^2)a^2 - 2a^2bx + 2a(b^2-a^2)x - 4abx^2 + (b^2-a^2)x^2 - 2bx^3 = a^2(b^2-a^2) - 2a^2(a+b)x$$

$$\text{demnach}\quad \left.\begin{array}{l}2ab^2x-4abx^2+b^2x^2-a^2x^2-2bx^3\\(2ab^2-4abx+b^2x-a^2x-2bx^2)x\end{array}\right\}=0$$

$$\text{also } x=0,\ \text{oder } 2bx^2+(a^2-b^2+4ab)x-2ab^2=0$$

$$\text{folglich}\quad x^2+\frac{a^2+4ab-b^2}{2b}x=ab$$

$$\text{mith. } x^2+\frac{a^2+4ab-b^2}{2b}\cdot x+\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2=\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2+ab$$

$$\text{demnach}\quad x=-\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+4ab-b^2}{4b}\right)^2+ab}$$

Zusatz 1.

Nach dem, was die geometrische, von der Rechnung unabhängige, Construction oben gezeigt hat, kann es nicht zweifelhaft seyn, dass der positive Werth von x die Linie CD, der negative die Linie CD' bezeichne. Der Werth $x=0$ sagt nichts anderes, als dass ein Kreis, dessen Mittelpunkt in C und Radius $=0$ wäre, die Eigenschaft habe, dass eine, von B an ihn gelegte, Tangente, welche BC selbst wäre, den zwischen dem Berührungspunkte, welcher C wäre, und dem Durchschnittspunkte A derselben mit dem gegebenen Kreise gelegenen Theil der gegebenen AC gleich hätte.

Zusatz 2.

Dasselbe Resultat liefert die Rechnung, wenn man den Werth von BQ sucht. Setzt man

$$BQ=y,\ \text{so ist } by:a^2=\left(\frac{b+y}{2}\right)^2:\left(a+\frac{b-y}{2}\right)^2$$
$$=(b+y)^2:(2a+b-y)^2$$

$$\text{also } by:a^2=b^2+2by+y^2:(2a+b)^2-2(2a+b)y+y^2$$

folgl. $by-a^2 : a^2 = b^2-(2a+b)^2+2(b+2a+b)y : (2a+b)^2-2(2a+b)y+y^2$
$= 4ab-4a^2+4(a+b)y : (2a+b)^2-2(2a+b)y+y^2$

mithin $4a^3b-4a^4+4a^2(a+b)y = (2a+b)^2by-2(2a+b)by^2$
$+by^3-(2a+b)^2a^2+2(2a+b)a^2y-a^2y^2$

also $0 = by^3-(a^2+4ab+2b^2)y^2+b(2a^2+4ab+b^2)y-a^2b^2$
$= (y-b)(by^2-(a^2+4ab+b^2)y+a^2b)$

somit $y-b=0$, oder $by^2-(a^2+4ab+b^2)y+a^2b=0$

demnach $y=b$, $\quad y^2-\frac{a^2+4ab+b^2}{b}y+a^2=0$

folglich $\left(y-\frac{a^2+4ab+b^2}{2b}\right)^2 = \left(\frac{a^2+4ab+b^2}{2b}\right)^2-a^2$

mithin $y = \frac{a^2+4ab+b^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{2b}\right)^2-a^2}$

Die letzteren Werthe von y sind beide positiv, und bezeichnen ohne allen Zweifel die Linien BQ, BQ'. Der Werth von $y=b$ weiset auf denselben Kreis hin, wie oben der Werth $x=0$.

Anmerkung.

Klügel, welcher diese Aufgabe in seinem Wörterbuche, Band I. p. 128 sq, behandelt, schliesst den Werth $x=0$, oder $y=b$ aus, und nennt den negativen Werth von x, und den grösseren der positiven Werthe von y fremde Wurzeln, d. i. solche, welche zur Frage nicht gehören. Aus dem Gesagten erhellet die Unrichtigkeit dieser Behauptung, und die Wichtigkeit der geometrischen Behandlung solcher Aufgaben. Das, was Klügel und mit ihm viele Andere fremde Wurzeln nennen, giebt es in der Algebra nicht. Sie fasst jede in eine Gleichung gebrachte Frage in der Allgemeinheit auf,

dass sie jeden positiven, und jeden negativen Werth der unbekannten Grösse, welcher der Gleichung Genüge leistet, aufsucht, und der negative Werth ist eben so gewiss, und in demselben Sinne, in welchem die Algebra die Aufgabe auffasst, eine Auflösung der Aufgabe, als der positive, und es ist eben so wenig erlaubt, einen negativen auszuschliessen, als einen positiven. Wer geometrische Constructionen, welche von der Rechnung unabhängig sind, macht, und sich die Mühe nehmen will, die geometrischen Bedeutungen der positiven und negativen algebraischen Werthe der gesuchten Grössen in allen Fällen zu erforschen, der wird sich davon überzeugen, dass die Algebra niemals eine nichts sagende, zur Frage nicht gehörende, überflüssige, oder, was eben so viel ist, falsche Antwort auf die ihr vorgelegten Fragen giebt.

Aufgabe XIII. (Fig. 13.)

Ein Quadrat zu beschreiben, in welchem der Ueberschuss der Diagonale über eine Seite der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABCD das geuchte Quadrat, so ist, wenn von der Diagonale AC die Linie AE = AB abgeschnit-

ten, und das, die Linie BC in F schneidende, Perpendikel EF auf AC aufgerichtet wird,

$$ECF = EFC$$

$$\text{also } FE = EC$$
$$= d;$$

$$\text{demnach } FC^2 = 2d^2.$$

Zieht man die gerade Linie AF, so ist

$$\triangle AEF \underset{S}{=} \triangle ABF$$

$$\text{folglich } BF = FE$$
$$= d;$$

mithin ist sowohl BF, als FC, somit BC gegeben.

Construction.

Man beschreibe über $BF = d$ das Quadrat BFGH, ziehe die Diagonale FH, nehme auf der Verlängerung von BF die Linie $CF = FH$, und beschreibe über BC das Quadrat ABCD, so hat dasselbe die gegebene Eigenschaft.

Beweis.

Fällt man auf die Diagonale AC das Perpendikel FE, so ist

$$\left.\begin{array}{r} FC^2 \\ FH^2 \\ 2FB^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = FE^2+EC^2 \\ = 2EC^2 \\ \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} FB \\ d \end{array}\right\} \begin{array}{l} = EC \\ = FE \end{array}$$

$$\text{folglich } AE = AB$$

$$\text{mithin } CA - AB = CA - AE$$
$$= CE$$
$$= d.$$

Zusatz.

Macht man in der Richtung von FB die Linie FC' = FH, beschreibt über BC' das Quadrat A'BC'D', zieht die Diagonale C'A', und fällt auf die Verlängerung derselben das Perpendikel FE', so ist

$$\left.\begin{array}{r} FC'^2 \\ FH^2 \\ 2FB^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = FE'^2 + E'C'^2 \\ = 2E'C'^2 \\ \end{array}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{r} FB \\ d \end{array}\right\} \begin{array}{l} = E'C' \\ = FE' \end{array}$$

$$\text{folglich } E'A' = A'B$$

$$\begin{array}{rl} \text{mithin } C'A' + A'B & = C'A' + A'E' \\ & = E'C' \\ & = d. \end{array}$$

Demnach erhält man ein Quadrat, in welchem die Summe der Diagonale und einer Seite der gegebenen geraden Linie d gleich ist.

Algebr. Auflösung.

$$\text{Setzt man } BC = x, \text{ so ist } \left.\begin{array}{r} (x+d)^2 \\ x^2 + 2dx + d^2 \end{array}\right\} = 2x^2$$

$$\text{also } d^2 = x^2 - 2dx$$

$$\text{folglich } 2d^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

$$\begin{array}{rl} \text{mithin } x & = d \pm d\sqrt{2} \\ & = d(1 \pm \sqrt{2}); \end{array}$$

demnach hat x zwey Werthe,

$$\begin{array}{rl} \text{den einen} & = d(\sqrt{2}+1) \\ \text{den anderen} & = -d(\sqrt{2}-1). \end{array}$$

Zusatz 1.

Die Natur der Sache erfodert, und aus der geo-

metrischen Construction erhellet; dass die durch die verschiedenen Werthe von x bezeichneten Linien nichts anderes sind, als die Linien BC, BC', wovon die durch den negativen Ausdruck bezeichnete Linie BC' in gerade entgegengesetzter Richtung mit der durch den positiven Ausdruck bezeichneten BC liegt.

Zusatz 2.

Die doppelten Werthe von x wurden lediglich bedingt durch den doppelten Werth der Diagonale des Quadrates, welches $= 2d^2$. Da nämlich das Quadrat der Diagonale des Quadrates der Linie $-d = 2(-d)^2$
$= 2d^2$ ist,
so giebt die Algebra den Werth der beiden, einander entgegengesetzt liegenden, Diagonalen FH, FH' der Quadrate der Linien FB, FB', deren jede $= d$, und wovon sie die eine durch $+d$, die andere durch $-d$ bezeichnet, durch die Ausdrücke $FH = +d.\sqrt{2}$, $FH' = -d\sqrt{2}$.

Zusatz 3.

Aus dem Gesagten erhellet wieder die Wichtigkeit der Beachtung des negativen Zeichens. Deutet dasselbe auch nicht immer auf eine zweite Auflösung einer Aufgabe hin in dem beschränkten Sinne, in welchem sie anfänglich aufgefasst war, so enthält sie doch die Auflösung in einem so wenig von dem anfänglich aufgefassten abweichenden Sinne, dass beide Auflösungen in den allgemeinen Darstellungen der Algebra für zwey Antworten auf eine Frage angesehen werden. Zugleich aber erhellet daraus, dass die Geometrie, richtig verstanden, dieselbe Allgemeinheit herbeiführt, wie die Algebra. Durfte man doch in der Construction nur sagen: man beschreibe aus F als Mittelpunkte einen Kreis mit

einm Radius = FH, welcher die verlängerte FB in C, C' schneide u. s. w., um dieselbe Allgemeinheit zu erhalten, in welcher die Algebra die Aufgabe auflöset.

Aufgabe XIV. (Fig. 14).

Ein rechtwinkliges $\triangle ABC$ zu beschreiben, in welchem die Summe der Katheten der gegebenen geraden Linie a, die Summe der Hypotenuse und der Höhe der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey $\triangle BAC$ das verlangte, so ist, wenn die Höhe durch AD bezeichnet wird,

$$BC \cdot AD = BA \cdot AC$$

also

$$\left.\begin{matrix} BC^2+2BC.AD+AD^2 \\ (BC+AD)^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BA^2+2BA.AC+AC^2 \\ (BA+AC)^2 \\ a^2 \end{matrix}\right\} + AD^2$$

folglich $b^2 - a^2 = AD^2$;

mithin ist AD, somit BC und das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man beschreibe über der geraden Linie CG = b einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne CE = a, ziehe die gerade Linie GE, schneide auf der Linie GC die Linie GB = GE ab, errichte in G auf GC das Perpendikel FG = GE, ziehe die Linie $FA \# GC$, und beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher der Linie FA in A begegne, so ist, wenn die geraden Linien BA, AC gezogen werden, $\triangle ABC$ das verlangte.

Determination.

Damit die Auflösung möglich werde, muss nicht nur in den über CG beschriebenen Halbkreis die Sehne CE $= a$ gelegt werden können, d. h. $a < b$ seyn, sondern auch die Linie FA den über BC beschriebenen Halbkreis erreichen,

$$\text{d. h. } \left.\begin{matrix} FG \\ GE \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} BC \text{ seyn} \\ \frac{CG - GE}{2} \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } 2\,GE \overset{=}{<} CG - GE$$

$$\text{folglich } 3\,GE \overset{=}{<} CG$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} 9\,GE^2 \\ 9(b^2 - a^2) \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} CG^2 \\ b^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } 8\,b^2 \overset{=}{<} 9\,a^2$$

$$\text{demnach } \tfrac{8}{9}\,b^2 \overset{=}{<} a^2.$$

Beweis.

Es ist $a < b$, also lässt sich in den über CG beschriebenen Kreis eine Sehne CE $= a$ legen. Auch

$$\text{ist } a^2 \overset{=}{<} \tfrac{8}{9}\,b^2$$

$$\text{also } 9\,a^2 \overset{=}{>} 8\,b^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} b^2 \\ CG^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} 9(b^2 - a^2) \\ 9\,GE^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } CG \geqq 3\,GE$$

$$\text{somit } CG - GE \geqq 2\,GE$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} \frac{CG-GE}{2} \\ \frac{CB}{2} \end{matrix}\right\} \geqq \left\{\begin{matrix} GE \\ FG; \end{matrix}\right.$$

also berührt, oder schneidet der über BC beschriebene Halbkreis die Linie FA. Geschieht es in A, so ist

$$\left.\begin{matrix} (BC+AD)^2 \\ (BC+FG)^2 \\ (CB+BG)^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\} = (BA+AC)^2 + \left\{\begin{matrix} AD^2 \\ GF^2 \\ GE^2 \\ b^2-a^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } (BA+AC)^2 = a^2$$

$$\text{folglich } BA+AC = a.$$

Da auch $BAC = R$, so hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung der Linie FA und des über BC beschriebenen Kreises ein einziges, im Fall des Schneidens ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Zusatz 1.

Schneidet man auch auf den Verlängerungen von CG und FG Linien B''G, $F''G = GE$ ab, legt $F''A \# CG$, und beschreibt über CB'' einen Halbkreis, welcher der Linie A''F'' in A'' begegne, so ist, wenn A''B'', A''C gezogen werden, und das Perpendikel A''D'' auf B''C gefällt wird,

mithin $-ay+y^2+a^2 = \pm b\sqrt{(2y^2-2ay+a^2)}$

demnach $\left.\begin{matrix}(y^2-ay+a^2)^2\\ y^4-2ay^3+a^2y^2+2a^2y^2-2a^3y+a^4\end{matrix}\right\} = 2b^2y^2-2ab^2y+a^2b^2$

somit $\left.\begin{matrix}y^4-2ay^3+(3a^2-2b^2)y^2-(2a^3-2ab^2)y-a^2b^2\\ (y^2-ay+b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2))(y^2-ay-b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2))\end{matrix}\right\} = 0.$

Es ist mithin entweder $y^2-ay+b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2) = 0$

somit $y^2-ay+\frac{1}{4}a^2 = b^2-a^2-b\sqrt{(b^2-a^2)}+\frac{1}{4}a^2$

folglich $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b^2-\frac{3}{4}a^2-b\sqrt{(b^2-a^2)})}$

oder $y^2-ay-b\sqrt{(b^2-a^2)}-(b^2-a^2) = 0$

somit $y^2-ay+\frac{1}{4}a^2 = b^2-a^2+b\sqrt{(b^2-a^2)}+\frac{1}{4}a^2$

folglich $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b^2-\frac{3}{4}a^2+b\sqrt{(b^2-a^2)})}$

welche Werthe nichts anderes bezeichnen können, als die Linien BA, BA', B''A'', B''A'''.

Zusatz 3.

Hätte man, da $AD^2 = b^2-a^2$, wie aus Obigem erhellet, $BC = b-\sqrt{(b^2-a^2)}$ gesetzt

also $\left.\begin{matrix}CB.AD\\ BA.AC\\ y.(a-y)\end{matrix}\right\} \begin{matrix}= \sqrt{(b^2-a^2)}(b-\sqrt{(b^2-a^2)}\\ = b\sqrt{(b^2-a^2)}-b^2+a^2\end{matrix}$

folglich $y^2-ay = b^2-a^2-{}^2\sqrt{(b^2-a^2)}$,

so wäre die Gleichung eine quadratische geworden, statt dass auf dem oben angegebenen Wege eine biquadratische erhalten wurde. Und das mag zum Beweise für die Wichtigkeit und Nothwendigkeit, das negative Zeichen vor dem Wurzelzeichen niemals zu vernachlässigen, dienen. Wer könnte die Algebra vor den

schwersten Vorwürfen zu schützen, wenn sie zur Bestimmung einer und derselben unbekannten Grösse einer vorgelegten Aufgabe bald zu einer Gleichung des zweiten, bald des vierten Grades führte?

Aufgabe XV. (Fig. 15.)

In ein gegebenes Quadrat ABCD ein gleichseitiges Dreieck BEF zu legen, dessen Grundlinie EF mit ihren Endpunkten E, F auf den Seiten AD, DC, und dessen Spitze in B liege.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey △ BEF das verlangte, so ist, wenn der Halbirungspunkt G der Linie BE mit F durch die gerade Linie FG verbunden wird, BGF = R. Da auch BCF = R, so lauft ein über BF als Durchmessern beschriebener Kreis durch die Punkte G, C, also ist BGC = BFC. Da EB = BF, AB = BC,

$$\text{so ist } \triangle AEB \cong \triangle FBC$$

$$\text{folglich } ABE = FBC$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} ABE + FBC \\ R - EBF \\ R - \tfrac{2}{3} R \\ \tfrac{1}{3} R \end{matrix}\right\} = 2FBC$$

$$\text{somit } FBC = \tfrac{1}{6} R$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix} BFC \\ BGC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \tfrac{5}{6} R \\ CBG \end{matrix}\right.$$

also $GC = CB$
$= CD.$

Zieht man $GL \# CB$, so ist sowohl $GLC = R$, als auch $BG:GE = CL:LD$

folglich $CL = LD$

mithin $DG = GC$;

demnach ist DGC ein gleichseitiges Dreieck. Also ist der Punkt G, die gerade Linie BG, und das Dreieck BEF gegeben.

Construction.

Man beschreibe über DC ein gleichseitiges Dreieck DGC, ziehe durch B, G die, die Seite AD in E schneidende, gerade Linie BE, mache $FB = BE$, und ziehe die gerade Linie EF, so ist BFE das verlangte Dreieck.

Beweis.

Zieht man den Halbirungspunkt L der Linie CD mit der Spitze G durch die gerade Linie LG zusammen, so ist $GLC = R$

also $GL \# DE$

folglich $DL:LC = EG:GB$

mithin $EG = GB.$

Ferner ist $DCG = \frac{2}{3}R$

somit $GCB = \frac{1}{3}R$

demnach $CGB = \frac{5}{6}R = CBG$

also $\left.\begin{matrix} ABE \\ FBC \end{matrix}\right\} = \frac{1}{6}R$

folglich $BFC = \frac{5}{6}R$
$= BGC;$

mithin liegen B, G, F, C auf dem Umfange eines Kreises, demnach ist BGF = R, also BF = FE, mithin das Dreieck BEF gleichseitig.

Zusatz 1.

Beschreibt man auch ein gleichseitiges Dreieck DG′C auf der anderen Seite von DC, zieht die, der verlängerten AD in E′ begegnende, gerade Linie BG′, macht BF′ = BE′, und zieht F′E′, so ist auch BF′E′ ein gleichseitiges Dreieck. Zieht man nämlich die gerade Linie LG′, so ist $G'LC = R$

also $G'L \# DE'$

folglich $DL : LC = E'G' : G'B$

mithin $E'G' = G'B.$

Ferner ist $DCG' = \frac{2}{3} R$

somit $BCG' = 1\frac{2}{3} R$

demnach $CG'B = \frac{1}{6} R = CBG'$

also $\left.\begin{matrix} ABE' \\ F'BC \end{matrix}\right\} = \frac{5}{6} R$

folglich $BF'C = \frac{1}{6} R$

$= BG'C;$

mithin liegen die Punkte B, F′, G′, C auf einem Kreisumfange, demnach ist BG′F′ = R, also ist das Dreieck BF′E′ gleichseitig.

Zusatz 2.

Da $CBG' = \frac{1}{6} R = CBF$, so liegen die Punkte B, F, G′ in einer geraden Linie, wie auch die Punkte B, G, F′. Auch wird $EF \# E'F'$.

Algebraische Auflösung.

1. Bezeichnet man die Linie CF mit x, die Seite des Quadrates mit a, so ist $x^2+a^2=BF^2$

$$
\begin{aligned}
&= FE^2\\
&= 2\,DF^2\\
&= 2(a-x)^2\\
&= 2a^2-4ax+2x^2
\end{aligned}
$$

$$\text{also } -a^2 = x^2-4ax$$

$$\text{folglich } 3a^2 = x^2-4ax+4a^2$$

$$\text{mithin } \pm a\sqrt{3} = x-2a$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} 2a\pm a\sqrt{3} \\ a(2\pm\sqrt{3}) \end{matrix}\right\} = x.$$

Zusatz.

Beide Werthe von x sind positiv, und bezeichnen ohne Zweifel nichts anderes, als die Linien CF, CF'. Ein Beweis, dass von den positiven Werthen keiner für eine fremde Wurzel anzusehen ist.

2. Setzt man $DF=y$, so ist

$$
\begin{aligned}
2y^2 &= FE^2\\
&= FB^2\\
&= a^2+(a-y)^2\\
&= 2a^2-2ay+y^2
\end{aligned}
$$

$$\text{also } y^2+2ay = 2a^2$$

$$\text{folglich } y^2+2ay+a^2 = 3a^2$$

$$
\begin{aligned}
\text{mithin } y &= -a\pm a\sqrt{3}\\
&= a(-1\pm\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

Zusatz.

Der positive Werth von y bezeichnet offenbar nichts anderes, als die Linie DF, während der negative die Linie DF′ bezeichnet. Ein Beweis, dass durch den Gegensatz der Lage die Geometrie dasjenige bezeichnet, was die Algebra durch den Gegensatz der Zeichen unterscheidet, und dass eine negative Wurzel nicht als eine fremde zu betrachten ist.

3. Setzt man BF=z, so ist $z^2 = a^2 + \begin{cases} CF^2 \\ (a - DF)^2 \\ (a \mp z\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 \\ a^2 \mp 2az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}z^2 \end{cases}$

$$\text{also } z^2 = 4a^2 \mp 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{folglich } z^2 \pm 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 2a^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

$$\text{mithin } z = \mp 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm a\sqrt{6} = a(\mp\sqrt{2} \pm \sqrt{6}).$$

Es hat mithin z folgende vier Werthe. Es ist

$$z = a(-\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -a(+\sqrt{2} - \sqrt{6}) = +a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$
$$z = a(-\sqrt{2} - \sqrt{6}) = -a(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -a(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$
$$z = a(+\sqrt{2} + \sqrt{6}) = +a(+\sqrt{2} + \sqrt{6}) = +a(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$
$$z = a(+\sqrt{2} - \sqrt{6}) = +a(\sqrt{2} - \sqrt{6}) = -a(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Zusatz 1.

Hätte man in der Gleichung $z^2 = a^2 + (a - DF)^2$ statt DF nur $+z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $z^2 = a^2 + (a - z\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2$ gesetzt, so hätte man erhalten $z^2 = a^2 + a^2 - 2az\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}z^2$

$$\text{also } z^2 = 4a^2 - 4az\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 4a^2 - 2az\sqrt{2}$$

$$\text{folglich } z^2 + 2az\sqrt{2} = 4a^2$$

$$\text{mithin } (z+a\sqrt{2})^2 = 6a^2$$

$$\text{somit } z = -a\sqrt{2} \pm a\sqrt{6}$$
$$= a(-\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$$

$$\text{demnach } z = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2}$$
$$\text{oder } z = -a(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Zusatz 2.

Die Werthe von z hätten aus den Werthen von x in folgender Weise gefunden werden können. Es

$$\text{ist } z^2 = a^2 + \begin{cases} x^2 \\ a^2(2 \pm \sqrt{3})^2 \\ a^2(4 \pm 4\sqrt{3}+3) \end{cases}$$
$$= a^2(8 \pm 4\sqrt{3})$$

$$\text{also } z = \pm a\sqrt{(8 \pm 4\sqrt{3})}.$$
$$= \pm a(\sqrt{6} \pm \sqrt{2}).$$

Zusatz 3.

Den beiden oben angegebenen Werthen von x correspondiren also dieselben vier gefundenen Werthe von z, welche oben einzeln bezeichnet sind, und je zwey und zwey einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Die positiven sind ohne Zweifel die Werthe der oben construirten Linien BF, BF', die negativen die Linien BF'', BF''', welche in dem Quadrate A'BC'D' die gleichseitigen Dreiecke BF''E'', BF'''E''' bestimmen. Namentlich ist

$$BF = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$BF' = +a(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$
$$BF'' = -a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$BF''' = -a(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Die in der Voraussetzung, dass DF nur $= z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ sey, gefundenen Werthe von $z = +a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ und $= -a(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ leiten nur zur Kenntniss der Linien BF und BF''', erschöpfen mithin die Aufgabe

nicht. Und es leuchtet daraus die Wichtigkeit des Satzes hervor, dass $DF = \pm z\sqrt{\frac{1}{2}}$ zu setzen ist.

Zusatz 4.

Beschreibt man über den gleichen Linien BA, AC, wovon die eine durch $+a$, die andere durch $-a$ bezeichnet werde, auf entgegengesetzten Seiten die Quadrate ABFG, ADEC, so ist

$$ABFG = (+a)^2, \quad ADEC = (-a)^2$$
$$= +a^2 \qquad\qquad = +a^2.$$

Zieht man in dem einen Quadrate die Diagonalen AF, BG, welche sich in O schneiden, in dem anderen die Diagonalen AE, DC, sich schneidend in Q, so ist $AO^2 = \frac{1}{2}(+a)^2$, $AQ^2 = \frac{1}{2}(-a)^2 = 1/2(+a)^2$ mithin ist $\frac{1}{2}(+a)^2$ sowohl dem Quedrate von AO, als dem von AQ gleich, und sowohl AO, als $AQ = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dass beide einander entgegengesetzt sind, drückt die Algebra durch die Zeichen $+ -$ aus.

Aufgabe XVI. (Fig. 16.)

Ein rechtwinkliges Dreieck BAC zu beschreiben, in welchem die Kathete AB der gegebenen geraden Linie a, und dasjenige Segment CD der Hypotenuse, welches durch das von der Spitze des rechten Winkels A auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel AD gebildet wird, der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist

$$CB . BD = BA^2$$
$$= a^2.$$

Da $CD = b$ werden soll, so ist der Punkt B und das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man mache $CD = b$, halbire CD in O, errichte in D auf CD das Perpendikel DL, nehme $DL = a$, ziehe die gerade Linie OL, beschreibe aus O als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= OL$, welcher der verlängerten CD in B begegne, beschreibe über CD als Durchmessern einen Kreis, lege an denselben die Tangente BE, und beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis, welcher dem Perpendikel DL in A begegne, und ziehe die gerade Linie CA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist $CB \,.\, BD = BE^2$
$= BA^2$

also $CB : BA = AB : BD$

folglich $CAB = BDA$
$= R.$

Ferner ist $CB \,.\, BD + DO^2 = OB^2$ (El. II. 6.)
$= OL^2$
$= LD^2 + DO^2$

mithin $\left.\begin{array}{l} CB.BD \\ BA^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = LD^2 \\ = a^2 \end{array}$

somit $BA = a.$

Da auch $CD = b$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Zusatz.

Zieht man auch von dem zweiten Durchschnitte B' des Kreises, welcher OL zum Radius hat, mit der

verlängerten DC eine Tangente B'E' an den über DC beschriebenen Kreis, beschreibt aus B' als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = B'E', welcher dem in C auf CD aufgerichteten Perpendikel in A' begegnet, so ist, wie leicht erhellet, auch B'A'D ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften.

Algebraische Darstellung.

Setzt man DB = x, so ist $\left.\begin{matrix} x(x+b) \\ x^2+bx \end{matrix}\right\} = a^2$

also $x^2+bx+\frac{1}{4}b^2 = a^2+\frac{1}{4}b^2$

folglich $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2)}$.

Zusatz.

Es hat x einen positiven und einen negativen Werth, wovon jener die Linie DB, dieser die Linie DB' bezeichnet, wie aus der geometrischen Construction hervorgehet, und es bestimmt der Punkt B' ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, wie der Punkt B. Zum Beweise, dass man nicht, wie behauptet wird, durch die geometrische Betrachtung der Figur entscheide, welcher von beiden Werthen der gesuchten Grösse eine richtige Auflösung gebe, sondern dass in allen Fällen beide Werthe in dem Sinne, wie die Algebra die Aufgabe auffasst, eine richtige Antwort auf die ihr vorgelegte Frage geben. Wohin sollte es führen, wenn die Algebra wirklich zuweilen unrichtige Antworten gebe, und man noch anderer Hülfsmittel bedürfte, um unter den gegebenen Antworten die richtige, oder die richtigen aufzusuchen?

Aufgabe XVII. (Fig. 17.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Grundlinie der gegebenen geraden Linie g, Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α, Schenkel-Unterschied der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Construction.

Man nehme den Winkel BDC $= R + \frac{1}{2}\alpha$, die Linie BD $= d$, beschreibe aus B als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= g$, welcher die Linie DC in C schneide, und mache den Winkel DCA $=$ ADC, so ist ABC das gesuchte Dreieck, wie von selbst erhellet.

Zusatz.

Bezeichnet man den zweiten Durchschnitt C′ des Kreises und der Linie DC mit C′, macht DC′A′ $=$ A′DC′, und zieht BC′, so ist A′BC′ gleichfalls ein Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst sich ergiebt.

Algebraische Darstellung.

Bezeichnet man den Unterschied der Winkel ACB, ABC mit φ, so ist $ACB = R - \frac{\alpha - \varphi}{2}$, $ABC = R - \frac{\alpha + \varphi}{2}$,

demnach ist $g : \left\{ \begin{matrix} AC \\ x \end{matrix} \right\} = \sin.\alpha : \cos.\frac{\alpha + \varphi}{2}$, $g : \left\{ \begin{matrix} AB \\ x+d \end{matrix} \right\} = \sin.\alpha : \cos.\frac{\alpha - \varphi}{2}$

$$\text{also } x = \frac{g.\cos.\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha}, \quad x + d = \frac{g.\cos.\frac{\alpha-\varphi}{2}}{\sin.\alpha}$$

$$\text{folglirh } d = g \frac{\cos.\frac{\alpha-\varphi}{2} - \cos.\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha}$$

$$= \frac{2g\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\varphi}{\sin.\alpha}$$

$$= \frac{g\sin.\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}$$

mithin $\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{d.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{g}$

somit $\left.\begin{matrix} 1-\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\varphi}^2 \\ \overline{\cos.\tfrac{1}{2}\varphi}^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 1-\frac{d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2}{g^2} \\ = \frac{g^2-d^2.\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2}{g^2} \end{matrix}$

demnach $\cos.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\pm\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{g}$.

Nun ist $\cos.\frac{\alpha+\varphi}{2} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\varphi-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\varphi$

also $\cos.\frac{\alpha+\varphi}{2} = \pm\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{g} - \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.d.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{g}$

folgl. $\left.\begin{matrix} g.\frac{\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}}{\sin.\alpha} \\ x \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \pm\frac{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin.\alpha}\sqrt{(g^2-d^2\cos.\tfrac{1}{2}\alpha^2)} - \frac{d\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin.\alpha} \\ = \pm\frac{\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d \end{matrix}$

mithin $x+d = \pm\frac{\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d.$

Es ist also x entweder $= +\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}d\right)$

oder $= -\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} + \tfrac{1}{2}d.\right)$

und x+d entweder $= +\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}+\tfrac{1}{2}d\right)$

oder $= -\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}-\tfrac{1}{2}d\right)$.

Zusatz.

Der erste Werth von x ist dem zweiten von x+d, der zweite von x dem ersten von x+d, mit entgegengesetzten Zeichen, gleich. Die Geometrie construirt die beiden Dreiecke ABC, A'BC', welche congruent sind, namentlich die Seiten BA', AC und A'C', AB gleich haben. Ueberdiess ist A'C' ⧺ AC. Bezeichnet also der erste Werth von x, welcher $= +\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}-\tfrac{1}{2}d\right)$ ist, die Linie AC, der erste Werth von x+d, welcher $= +\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}+\tfrac{1}{2}d\right)$ ist, die Linie BA, so bezeichnet der zweite Werth von x, welcher $= -\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{\tfrac{1}{2}\alpha}^2)}}{2\sin.1/2\,\alpha}+1/2\,d\right)$ ist, die Linie A'C', der zweite Werth von x+d, welcher $= -\left(\frac{\sqrt{(g^2-d^2\cos.\overline{1/2\,\alpha}^2)}}{2\sin.1/2\,\alpha}-1/2\,d\right)$ ist, die Linie BA'. Die Algebra unterscheidet mithin nicht blos die, von einem Punkte aus in entgegengesetzten Richtungen laufenden, Linien, wie BA, BA', durch die Zeichen + —, sondern auch Linien, wie AC, A'C', welche von verschiedenen Punkten einer geraden Linie zu verschiedenen Seiten derselben einander parallel gezogen werden.

Aufgabe XVIII. (Fig. 18.)

Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, welches einen Winkel = ACE habe, und worin die diesem Winkel gegenüberliegende Seite auf BC perpendikular liege.

Geometrische Behandlung.

Construction.

Man fälle auf BC das Perpendikel AD herab, beschreibe über BC einen Halbkreis, verlängere, wenn es nöthig ist, die Linie AD bis zum Durchschnitte mit demselben in E, ziehe die gerade Linie CE, und beschreibe aus C als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = CE, welcher der BC in F begegne, errichte in F auf BC ein Perpendikel FG, und verlängere CA bis zum Durchschnitte mit demselben in G, so ist GFC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

Es ist $\triangle ADC : \triangle ABC = DC : CB = DC^2 : \begin{cases} DC.CB \\ CE^2 \\ CF^2 \end{cases}$

$= \triangle ADC : \triangle FGC$

---

also $\triangle ABC = \triangle FGC$.

Zusatz.

Bestimmt man den zweiten Durchschnitt F′ des Kreises mit der Linie BC, und errichtet in F′ das Perpendikel F′G′ bis zum Durchschnitte G′ mit der verlängerten AC, so ist auch $\triangle CF'G'$ ein Dreieck mit derselben Eigenschaft, wie leicht erhellet.

Algebr. Auflösung.

Setzt man $FC = x$, $CG = y$, so ist $xy = BC . CA$

$= a.b$, wenn $BC = a$, $CA = b$ gesetzt wird.

$$\text{Es ist aber} \quad \left.\begin{matrix} x : y \\ x^2 : xy \end{matrix}\right\} = DC : \left\{\begin{matrix} CA \\ b \end{matrix}\right.$$
$$= a.DC : ab$$

$$\text{also } x^2 = a.DC$$

$$\text{folglich } x = \pm\sqrt{(a.DC)}.$$

Zusatz. 1.

Die Linien F'C, CF stellen sich algebraisch unter den Zeichen + — dar.

Zusatz 2.

Es ist $y = \frac{bx}{DC}$, also gehört dem negativen Werthe von x ein negativer Werth von y zu, gleichwie die Geometrie die Linie G'C der Linie GC entgegengesetzt legt.

Zusatz 3.

Weil die Algebra das Dreieck F'CG' in demselben Sinne, wie das Dreieck FCG, dem Dreiecke ABC gleich nachweiset, so unterscheidet sie zwey Dreiecke, welche, wie die Dreiecke FCG, F'CG', um Verticalwinkel liegen, nicht durch die Zeichen + —, und nennt nicht das eine das entgegengesetzte des anderen.

Zusatz 4.

$$\text{Da der Inhalt des Dreieckes} \left.\begin{matrix} F'CG' \\ \frac{CF'.F'G'}{2} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \triangle CFG \\ \frac{CF.FG}{2} \end{matrix}\right.$$

ist, so muss, weil F'C in Beziehung auf FC negativ ist, F'G' negativ seyn, in Beziehung auf FG. Die Algebra unterscheidet also Linien, welche, wie FG, F'G', auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie BF', und, von ver-

schiedenen Punkten F, F′ aus, einander parallel liegen, durch die Zeichen + —.

Zusatz 5.

Da endlich $\triangle F'CG' = F'C.CG'.\sin.F'CG'$, so ist, weil $\triangle F'CG'$ positiv ist, $F'C$, CG' aber negativ sind, $\sin.F'CG$ positiv. Die Algebra unterscheidet also die Sinus zweyer Vertikalwinkel nicht durch die Zeichen + —.

Aufgabe XIX. (Fig. 19.)

Zwischen die Schenkel des Winkels, welchen die gegebenen Linien HE, KF mit einander bilden, eine gerade Linie HK der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie PQ parallel zu legen, welche ein Dreieck HBK abschneide, dessen Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden Linien a gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey $\triangle HBK$ das verlangte, so ist, wenn $BC = a$ genommen, das Quadrat ABCD construirt, durch den Durchschnitt F der Linien AD, KF die Linie $FE \# PQ$ gezogen wird,

$$\left.\begin{matrix}\triangle BFE : \triangle KBH \\ EB^2 : BH^2\end{matrix}\right\} = \triangle BFE : \left\{\begin{matrix}BC^2 \\ \triangle BDM,\end{matrix}\right. \text{ wenn } MA = AB;$$

$$= EB:BM \text{ (El. VI., 1.)}$$

$$= EB^2 : EB.BM$$

$$\text{also } BH^2 = EB.BM;$$

mithin ist BH, somit H, und die Lage der Linie HK gegeben.

Construction.

Man mache $BC = a$, construire das Quadrat ABCD, ziehe durch den Durchschnitt F der Linien KF, AD die Linie FE#PQ, nehme auf den Verlängerungen von AB die Linien $MA = AD$, $LB = BE$, beschreibe über ML, als Durchmessern, einen Kreis, welcher die Linie BH in H schneide, u. ziehe HK#PQ, so ist HBK das verlangte Dreieck.

Beweis.

Es ist $HB^2 = LB . BM$ (El. VI. 17.)

$$\left.\begin{array}{r} \text{also } EB^2 : BH^2 \\ \triangle BFE : \triangle KBH \end{array}\right\} \begin{array}{l} = EB^2 : EB.BM \\ = EB : BM \\ = \triangle BFE : \left\{\begin{array}{l} \triangle BDM \\ BC^2 \\ a^2 \end{array}\right. \end{array}$$

folglich $\triangle KBH = a^2$.

Zusatz.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt H' des Kreises und der Linie EH die gerade Linie H'K' der Linie PQ parallel, so ist auch, wie von selbst erhellet, H'BK' ein Dreieck mit der gegebenen Eigenschaft.

Algebraische Behandlung.

Bezeichnet man HB mit x, so ist

$$x^2 = EB.BM$$
$$= 2a.EB$$

also $x = \pm\sqrt{2a.EB}$.

Zusatz.

Die verschiedenen Werthe von x bezeichnen offenbar nichts anderes, als die Linien BH, BH'. Und da das Dreieck $H'BK' = +a^2$, wie das Dreieck HBK, so unterscheidet die Algebra gleiche Dreiecke, welche in Vertikalwinkeln liegen, nicht durch die Zeichen + —.

Aufgabe XX. (Fig. 20.)

Durch einen innerhalb des gegebenen Winkels DCE gegebenen Punkt O eine gerade Linie AB zwischen die Schenkel des Nebenwinkels zu legen, dass das Dreieck ACB dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich werde.

Algebraische Auflösung.

Es sey ABC das verlangte Dreieck, so ist, wenn OD der Linie CE parallel gezogen, und △DKC dem Dreieck ABC gleich gemacht wird,

$$AC:\left\{\begin{matrix}CD\\OE\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \\ \\ CB:BE\end{matrix}\right\} = KC:CB \text{, wenn } OE \# DC;$$

$$\text{also } BC:\left\{\begin{matrix}EB-BC\\CE\end{matrix}\right\} = CK:\left\{\begin{matrix}BC-CK\\KB\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}CB.BK\\CB(BC-CK)\\x(x-CK)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}EC.CK\\ \\a.CK,\end{matrix}\right.$$ wenn CB = x, CE = a gesetzt wird;

$$\text{mithin } (x-\tfrac{1}{2}CK)^2 = \tfrac{1}{4}CK^2 + a.CK$$

$$\text{demnach } x = \tfrac{1}{2}CK \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}CK^2 + a.CK)}.$$

$$\text{Da } \triangle DCK = \triangle ABC = q^2$$

so ist auch $\frac{1}{2}KC.CF = q^2$, wenn CF auf BC perpendikular aufgerichtet, u. bis zum Durchschnitt mit OD verlängert wird;

$$\text{also } KC = \frac{2q^2}{CF}$$

$$= \frac{2q^2}{b}, \text{ wenn man } CF = b \text{ setzt;}$$

$$\text{folglich ist } x = \frac{q^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{q^4}{b^2} + a.\frac{2q^2}{b}\right)}$$

Es hat mithin x zwey der absoluten Grösse nach ungleiche Werthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Ist ABC das gesuchte Dreieck, so ist nach Obigem CB.BK = EC.CK. Da EC, CK gegeben sind, und CB—BK = KC, so ist (Euclids Data 84.) CB, somit der Punkt B und die gerade Linie OB gegeben.

Construction.

Man mache OD # CE, richte in C auf BC ein Perpendikel auf, welches der Linie OD in F begegne, nehme auf derselben CH = 2q, auf CB die Linie CG = q, ziehe die gerade Linie FG, und durch H eine derselben parallel laufende, die Linie CB in K schneidende, Linie, mache OE # CD, beschreibe über KE einen Halbkreis, welcher die Linie CH in M schneide, halbire CK in Q, beschreibe aus Q als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser = QM, welcher die verlängerte CK in B erreiche, und ziehe die, die Linie CD in A schneidende, gerade Linie OB, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

$$\text{Es ist } CB.BK = CM^2$$
$$= KC.CE$$

$$\text{also } BC:CE = CK:KB$$

$$\text{folglich}\quad \left.\begin{array}{r} CB:\left\{\begin{array}{c}BC+CE\\ BE\end{array}\right\} \\ AC:\left\{\begin{array}{c}OE\\ CD\end{array}\right\}\end{array}\right\} = KC:\left\{\begin{array}{c}CK+KB\\ CB\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\text{mithin}\ \triangle ABC &= \triangle KCD\\ &= \tfrac{1}{2}\,FC.CK\\ &= \tfrac{1}{2}\,HC.CG\,, \quad \text{weil } FC:CH = GC:CK;\\ &= \tfrac{1}{2}.2q.q\\ &= q^2.\end{aligned}$$

Zusatz 1.

Der Kreis, dessen Mittelpunkt Q ist, schneidet auch die verlängerte KC in einem Punkte B′, welcher, weil $QM < QE$ (El. III. 7.), zwischen C, E liegt, so dass also die gerade Linie OB′ in ihrer Verlängerung der verlängerten DC in einem Punkte A′ begegnet.

$$\begin{aligned}\text{Auch ist } CB'.B'K &= CM^2\\ &= KC.CE\end{aligned}$$

$$\text{folglich } B'C:CE = CK:KB'$$

$$\text{mithin}\quad \left.\begin{array}{r} CB':\left\{\begin{array}{c}EC-CB'\\ B'E\end{array}\right\} \\ A'C:\left\{\begin{array}{c}OE\\ CD\end{array}\right\}\end{array}\right\} = KC:\left\{\begin{array}{c}B'K-KC\\ CB'\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\text{somit } \triangle A'B'C &= \triangle KCD\\ &= q^2.\end{aligned}$$

Zusatz 2.

Der negative Werth von x bezeichnet die Linie CB′, welche mit der durch den positiven Werth bezeichneten Linie BC in gerade entgegengesezter Richtung liegt.

Zusatz 3.

Der negative Werth löset die Aufgabe ganz in demselben Sinne auf, in welchem sie der positive auflöset.

Zusatz 4.

Da das Dreieck A'B'C eben so, wie $\triangle$ ABC $= + q^2$ gefunden wird, so werden zwey gleiche Dreiecke, welche wie diese, um Vertikalwinkel liegen, von der Algebra nicht durch die Zeichen $+$ $-$ unterschieden.

Zusatz 5.

$$\text{Da}\;\left.\begin{array}{r}\triangle A'B'C\\ q^2\\ \triangle ABC\\ AC.CB.\sin.ACB\end{array}\right\} = A'C.CB'.\sin.A'CB'$$

so ist sin. A'C B' $=$ sin. ACB, somit sin. A'C B' positiv, wie sin. ACB. Es haben also die Sinus zweyer Vertikalwinkel einerley Zeichen. Sind mithin zwey Sinus der absoluten Grösse nach einander gleich, in den Zeichen aber verschieden, so sind die ihnen zugehörigen Winkel nicht Vertikalwinkel.

Aufgabe XXI. (Fig. 21.)

Von einem innerhalb eines gegebenen Winkels GBA gegebenen Punkt O eine gerade Linie zu ziehen, welche den einen Schenkel und die Verlängerung des anderen so schneide, dass das Rechteck aus den Segmenten, welche zwischen diesen Durchschnittspunkten und der Spitze des Winkels liegen, dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey Ox die gesuchte Linie, also $LB.Bx = q^2$, so ist, wenn OA der Linie BG parallel gezogen, und $OA.BE = q^2$ gemacht wird,

$$LB.Bx = OA.BE$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OA:LB \\ Ax:xB \end{matrix}\right\} = xB:BE$$

$$\text{folglich } AB:Bx = xE:EB$$

$$\text{mithin } Bx.xE = AB.BE.$$

Da AB, BE gegeben sind, so ist Bx.xE, und weil Bx—xE=BE ist, auch Bx, somit die Linie Ox der Lage nach gegeben.

Corstruction.

Man ziehe die geraden Linien GO, OA den Linien AB, BG parallel, nehme $HB = BK = q$, ziehe die, die verlängerte AB in E schneidende, Linie KE der geraden Linie GH parallel, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher von dem auf AB aufgerichteten Perpendikel BM in M geschnitten werde, halbire BE in F, ziehe die gerade Linie FM, und beschreibe aus F als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = FM, welcher der verlängerten BE in x begegne, und ziehe die, die Linie BG in L schneidende, gerade Linie Ox, so ist dieselbe die verlangte.

Beweis.

$$\text{Es ist } Bx.xE = BM^2$$

$$= AB.BE$$

$$\text{also } AB:Bx = xE:EB$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} Ax:xB \\ OA:BL \end{matrix}\right\} = xB:BE$$

$$\text{mithin } LB.Bx = OA.BF$$
$$= GB.BE$$
$$= HB.BK$$
$$= q^2.$$

Zusatz.

Nimmt man auch $Fx' = F'M$, so liegt, weil $\left.\begin{matrix}FM\\Fx'\end{matrix}\right\} < FA$, der Punkt x' zwischen den Punkten A, B, also schneidet die gerade Linie Ox' in ihrer Verlängerung die Verlängerung von GB in einem Punkte L'.

$$\text{Auch ist } Bx'.x'E = AB.BE$$

$$\text{folglich } AB:Bx' = x'E:EB$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}Ax':x'B\\OA:BL'\end{matrix}\right\} = x'B:BE$$

$$\text{somit } L'B.Bx' = OA.BE$$
$$= q^2;$$

demnach ist eine zweite Linie Ox' mit der gegebenen Eigenschaft gefunden.

Algebraische Auflösung.

Es sey $Bx = x$, so ist

$$\left.\begin{matrix}x(x-BE)\\x^2 - x.BE\end{matrix}\right\} \begin{matrix}= AB.BE\\= c.BE,\end{matrix}$$ wenn $AB = c$ gesetzt wird;

$$\text{folglich } x^2 - x.BE + \tfrac{1}{4}BE^2 = \tfrac{1}{4}BE^2 + c.BE$$

$$\text{mithin } x = \tfrac{1}{2}BE \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}BE^2 + c.BE)}$$

$$= \frac{q^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{q^4}{4b^2} + c.\frac{q^2}{b}\right)},$$

wenn $GB = OA = b$ gesetzt wird;

demnach hat x zwey ungleiche Werthe, wovon der eine posi[illegible] der andere negativ ist, und jener die Linie Bx,

dieser die Linie Bx' bezeichnet, von welchen die eine der anderen gerade entgegengesetzt ist.

Zusatz.

Da sowohl $\triangle LBx$, als $\triangle L'Bx' = q^2$, so unterscheidet die Algebra Dreiecke, welche, wie diese, in Vertikalwinkeln liegen, nicht durch die Zeichen $+ -$.

Aufgabe XXII. (Fig. 22.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel und Flächenraum gegeben seyen.

Algebraische Auflösung.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist

$$CA : AB = \sin B : \sin C$$
$$AB : BD = 1 : \sin A$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} AC : BD \\ AC^2 : AC.BD \end{array}\right\} = \sin B : \sin A . \sin C$$

folglich $AC^2 : \frac{1}{2} AC.BD = 2 \sin B : \sin A . \sin C$.

Setzt man $AC = x$, und soll der Flächenraum dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich werden,

so ist $x^2 : q^2 = 2 \sin B : \sin A . \sin C$

$$\text{mithin } x^2 = \frac{q^2 . 2 \sin B}{\sin A . \sin C}$$

$$\text{also } x = \pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin B}{\sin A . \sin C}\right)}$$

Der Werth von BD, welcher $= \frac{2 q^2}{AC}$,

$$\text{wird} = \frac{2 q^2}{\pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin B}{\sin A . \sin C}\right)}}$$

$$= \pm 2 q \sqrt{\left(\frac{\sin A . \sin C}{2 \sin B}\right)}$$

$$= \pm q \sqrt{\left(\frac{2 \sin A . \sin C}{\sin B}\right)}.$$

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, BD perpendikular auf AC, AQ # BD, $AQ = 2q$, QE # AC. Durch den Durchschnitt E der Linien QE, EA sey EF # BC gezogen, auch EG perpendikular auf AF gefällt. So

$$\text{ist } CA:AB = FA:AE$$
$$AB:BD = AE:EG$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} AC:BD \\ AC^2:AC.BD \end{matrix}\right\} = AF:EG$$

$$\text{folglich } AC^2: \left\{\begin{matrix} \frac{AC.BD}{2} \\ q^2 \end{matrix}\right\} = AF: \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} EG \\ \frac{1}{2} AQ \\ AL \\ q \end{matrix}\right.$$
$$= q.AF:q^2$$

$$\text{mithin } AC^2 = q.AF$$

$$\text{somit } q:AC = CA:AF.$$

Da q gegeben ist, uud AF gefunden werden kann, so lässt sich AC und das ganze Dreieck ABC finden.

Construction.

Man mache FAE = dem einen der gegebenen Winkel, richte in A ein Perpendikel $AQ = 2q$ auf, ziehe der Linie AF die Linie QE parallel, welche der Linie AE in E begegne, lege in E an AE den Winkel AEF dem zweiten der gegebenen Winkel gleich, bezeichne mit F den Durchschnitt der Linien AF, FE, verlängere QA um AH = AF, halbire QA in L, beschreibe über LH, als Durchmessern, einen Kreis, welcher die Linie AF in C schneide, und ziehe CB # EF, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix}LA\\q\end{matrix}\right\}:AC = CA:\left\{\begin{matrix}AH\\AF\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } AC^2 = q.AF$$

$$\text{folglich } AC^2:q^2 = q.AF:q^2$$
$$= AF:\left\{\begin{matrix}q\\AL\\\frac{1}{2}AQ\\\frac{1}{2}EG\end{matrix}\right., \quad \text{wenn } EGF = R;$$
$$= AC:\tfrac{1}{2}BD$$
$$= AC^2:\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}AC.BD\\\triangle ABC\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \triangle ABC = q^2.$$

Zusatz 1.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt C' des Kreises mit der Linie FA eine gerade Linie $C'B'$ mit EF parallel, und verlängert EA bis zum Durchschnitt mit derselben in B', so ist auch

$$LA:AC' = C'A:\left\{\begin{matrix}AH\\AF\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } AC'^2 = LA.AF$$
$$= q.AF$$

$$\text{folglich } AC'^2:q^2 = q.AF:q^2$$
$$= AF:\left\{\begin{matrix}q\\\frac{1}{2}EG\end{matrix}\right.$$
$$= AC':\tfrac{1}{2}B'D', \quad \text{wenn } B'D'A = R;$$
$$= AC'^2:\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}AC'.B'D'\\\triangle AB'C'\end{matrix}\right.$$

mithin $\triangle$ AB'C' = q^2.

Zusatz 2.

Das Dreieck AB'C', welches um den Verticalwinkel des Winkels BAC liegt, ist nicht in einem solchen Gegensatze zu dem Dreiecke ABC, wie ihn die Algebra durch die Zeichen + — ausdrückt.

Zusatz 3.

Die Geometrie construirt zwey gleiche, in entgegengesetzter Richtung liegende, Grundlinien, gleichwie die Algebra zwey absolut gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe für dieselben angiebt.

Zusatz 4.

Da die Algebra auch für CB zwey einander gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene, Werthe angiebt, und die Geometrie die geraden Linien CB, C'B', welche einander parallel sind, construirt, so unterscheidet die Algebra zwey einander gleiche, auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie liegende, einander parallele, gerade Linien durch die Zeichen + —.

Zusatz 5.

Dasselbe gilt von den beiden Perpendikeln BD, B'D', welche die Algebra durch + — unterscheidet.

Zusatz 6.

Da AC'.C'B'. sin . AC'B' = q^2, gleichwie AC.CB.sin . ACB = q^2, so hat sin'. ACB' das Zeichen +, wie sin . ACB. Die Winkel AC'B' und ACB, welche Wechselwinkel zwischen parallelen geraden Linien sind, sind also nicht solche, deren Sinus die Algebra mit entgegengesetzten Zeichen versieht.

Aufgabe XXIII. (Fig. 23.)

Von einem Punkte C der Peripherie eines gegebenen Kreises ein Perpendikel CB auf den gegebenen Diameter GH zu fällen, dass das Rechteck aus diesem Perpendikel und dem zwischen demselben und dem Mittelpunkte A gelegenen Segmente des Diameters dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey C der gesuchte Punkt, so ist, wenn das Perpendikel BO auf AC gefällt wird,

$$AC.BO = AB.BC$$
$$= q^2$$

$$\text{also } AC:q = q:BO;$$

folglich ist BO der Grösse nach, somit das Dreieck ABC der Art und Grösse, mithin auch AB der Grösse nach, also der Punkt B, so wie der Punkt C gegeben.

Construction.

Man errichte auf GH in dem Punkte A ein Perpendikel, nehme KA = AP = q, ziehe die gerade Linie GK, mache PL ‡ GK, bezeichne den Durchschnitt der Linie PL und der Verlängerung von AK mit L, lege durch L die Linie LN ‡ GH, beschreibe über AG als Durchmessern einen Kreis, welcher die Linie LN in M erreiche, ziehe die gerade Linie AM, mache AB = AM, und errichte in B ein Perpendikel auf AB, so ist der Durchschnitt desselben mit dem Kreise der gesuchte Punkt.

Determination.

Damit der Kreis über AG der Linie LN begegne, muss

$$AL \underset{<}{=} \tfrac{1}{2} AG \text{ seyn}$$

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} PA:AL \\ GA.\left\{\begin{array}{l} AK \\ q \end{array}\right\} \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ > \end{array} \left\{\begin{array}{c} PD \\ q \end{array}\right\} : \tfrac{1}{2} AG$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2} AG^2 \underset{>}{=} q^2$$

$$\text{mithin } AG^2 \underset{>}{=} 2 q^2.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AG^2 \underset{>}{=} 2 q^2$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2} AG^2 \underset{>}{=} q^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{r} AG:q \\ q:AL \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ > \end{array} q : \tfrac{1}{2} AG$$

$$\text{mithin } AL \underset{<}{=} \tfrac{1}{2} AG;$$

demnach berührt, oder schneidet der Kreis die Linie LN in einem Punkt M.

$$\text{Ferner ist } CA = AG, \quad BA = AM$$

$$\text{also } CB = GM$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } CB.BA &= GM.MA \\ &= GA.AL \\ &= KA.AP \\ &= q^2. \end{aligned}$$

Zusatz 1.

Macht man auch $B'A = AM$, und errichtet in B'

ein den Kreis in C' schneidendes Perpendikel auf GH, so ist auch C' ein Punkt mit der gegebenen Eigenschaft.

Zusatz 2.

Ist der Punkt M ein Berührungspunkt, so giebt es die angegebenen beiden Punkte C, C' mit den gegebenen Eigenschaften. Ist der Punkt M ein Durchschnittspunkt, so bestimmt der zweite Durchschnitt N noch zwey andere Punkte mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Algebraische Darstellung.

Setzt man $AB = x$, $BC = y$, $AH = r$, so ist

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad xy = q^2$$

folglich $x^2 + 2xy + y^2 = r^2 + 2q^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = r^2 - 2q^2$

also $x + y = \pm \sqrt{(r^2 + 2q^2)}$, $x - y = \pm \sqrt{(r^2 - 2q^2)}$

$$\text{mithin } x = \frac{\pm \sqrt{(r^2 + 2q^2)} \pm \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{(r^2 + 2q^2)} \mp \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

Es haben also x, y vier Werthe

$$x = + \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} + \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$x = + \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} - \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$x = - \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} - \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$x = - \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} + \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$y = + \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} - \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$y = + \frac{\sqrt{(r^2 + 2q^2)} + \sqrt{(r^2 - 2q^2)}}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{(r^2+2q^2)}+\sqrt{(r^2-2q^2)}}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{(r^2+2q^2)}-\sqrt{(r^2-2q^2)}}{2},$$

von welchen die Werthe von x ohne Zweifel nichts anderes bezeichnen, als in der Ordnung die Linien AB'', AB, AB''', AB', die Werthe von y die Linien B''C'', BC, B'''C''', B'C'.

Zusatz.

Wenn man aus der zweiten Gleichung den Werth von $y = \frac{q^2}{x}$ genommen, und $x^2 + \frac{q^4}{x^2} = r^2$ gesetzt hätte,

so wäre $x^4 + q^4 = r^2x^2$ gefunden worden,

also $x^4 - r^2x^2 = q^4$

folglich $x^4 - r^2x^2 + \frac{1}{4}r^4 = \frac{1}{4}r^4 - q^4$

mithin $x^2 = \frac{1}{2}r^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^4 - q^4)}$

somit $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}r^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^4 - q^4)})}$.

Es hätte demnach x ebenfalls vier verschiedene Werthe erhalten, welche mit den oben gefundenen einerley sind. Und sämmtliche lösen die Aufgabe in dem Sinne ihrer Aussage auf.

Aufgabe XXIV. (Fig. 24. a. b.)

Von einem gegebenen Punkte O durch zwey gegebene, einander in F schneidende, gerade Linien AB, CD eine gerade Linie OxL zu ziehen, dass das Rechteck aus dem Segmente Fx und dem, zwischen dem Punkte L und dem auf der Verlängerung von DF gegebenen Punkte G

gelegenen, Segmente GL dem Quadrate der gegebenen geraden Linie q gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey OL die gesuchte Linie, so ist, wenn OH der Linie AB parallel gezogen, und $OH . GE = q^2$ gemacht wird, $OH.GE = Fx.GL$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OH:Fx \\ HL:LF \end{matrix}\right\} = LG:GE$$

$$\text{folglich } HF:FL = LE:EG$$

$$\text{mithin } FL.LE = HF.EG.$$

Da HF, EG gegebene Linien sind, so ist das Rechteck FL.LE der Grösse nach, und weil $FL + LE = FE$ gegeben ist, die Linie FL, der Punkt L, und die gerade Linie OL gegeben.

Construction

Man mache OP♯FC, GP♯AB, $QG = GT = q$, ziehe die Linie QE der geraden Linie PT parallel, beschreibe über FE einen Halbkreis, richte auf GH die Perpendikel NF, EM auf, nehme $NF = FH$, $ME = EG$, ziehe die gerade Linie MN, welche dem Halbkreise in R begegne, lasse auf FG das Perpendikel RL herab, und ziehe die gerade Linie OL, so ist dieselbe die verlangte.

Determination.

Damit MN dem Halbkreise begegne, muss

$$\left.\begin{matrix} EM.FN \\ EG.FH \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4} FE^2 \text{ seyn,}$$

$$\text{also } 4 EG.FH \overset{=}{<} FE^2$$

folglich $o \overset{=}{<} \begin{cases} FG^2 - 2FG.GE + EG^2 - 4EG.FH \\ FG^2 - 2EG(FG + 2FH) + EG^2 \end{cases}$

---

mith. $\left.\begin{matrix}(FG+2HF)^2 \\ FG^2+4GF.FH+ \\ 4HF^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} FG^2 - 2EG(FG+2FH) + EG^2 + (FG+2FH)^2$

---

somit $4FH.HG \overset{=}{<} -2EG(FG+2FH) + EG^2 + (FG+2FH)^2.$

Da das Aggregat der Glieder, welche rechts vom Zeichen der Gleichheit liegen, sowohl $= (EG-(FG+2FH))^2$, als $= ((FG+2FH) - EG)^2$ ist, so muss entweder

$2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} EG - (FG+2FH)$, oder

$2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} (FG+2FH) - EG$ seyn,

---

also entweder $FG + 2FH + 2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} EG$,

oder $EG \overset{=}{<} FG + 2FH - 2\sqrt{(FH.HG)}$

---

folgl. entweder $\left.\begin{matrix}(FG+2FH+2\sqrt{(FH.HG)}OH) \\ (GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)}OH\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \begin{cases} EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GT \\ q^2 \end{cases}$

oder $\left.\begin{matrix}EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GT \\ q^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \begin{cases} (FG+2FH-2\sqrt{(FH.HG)})OH \\ (GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})OH \end{cases}$

Oder es ist $2\sqrt{(FH.HG)} \overset{=}{<} \begin{cases} \pm(EG-(FG+2FH))^2 \\ \pm(EG-(GH+HF))^2 \end{cases}$

---

also entweder $GH + HF + 2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} EG$

---

folglich $OH(GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)}) \overset{=}{<} \begin{cases} EG.OH \\ EG.GP \\ QG.GF \\ q^2 \end{cases}$

oder $EG \overset{=}{<} GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)}$

mithin $\left.\begin{matrix} EG.OH \\ q^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} OH(GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})$.

Jenes ist die Determination für den Fall, dass der Punkt L zwischen G, F, dieses für den Fall, dass derselbe auf der Verlängerung von GH liege. Beide Determinationen führen auf die Bedingung, dass $4\,GH.HF \overset{=}{<} EG^2-2\,EG(FG+2\,FH)+(FG+2\,FH)^2$ werde, und finden durch das doppelte Zeichen $\pm$ vor der Wurzelgrösse $(EG-(FG+2FH))$ ihre Erledigung.

Beweis.

Es ist für den einen Fall

$OH(GH+HF+2\sqrt{(GH.FH)}) \overset{=}{<} \begin{cases} q^2 \\ QG.GF \\ EG.GP \\ EG.OH \end{cases}$

also $GH+HF+2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} EG$

folglich $2\sqrt{(GH.HF)} \overset{=}{<} \begin{cases} EG-(GH+HF) \\ EG-(FG+2FH) \end{cases}$

mithin $4\,GH.HF \overset{=}{<} EG^2-2EG(FG+2FH)+(FG+2FH)^2$.

Für den anderen Fall ist $\left.\begin{matrix} q^2 \\ EG.OH \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} OH(GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})$

$$\text{also } EG \overset{=}{<} GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)}$$

$$\text{folglich } 2\sqrt{(GH.HF} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}(GH+HF)-EG \\ FG+2FH-EG\end{matrix}\right\}$$

$$\text{mithin } 4GH.HF \overset{=}{<} (FG+2FH)^2-2EG(FG+2FH)+EG^2$$

demnach in beiden Fällen

$$\left.\begin{matrix}FG^2 4GF.FH+4FH^2 \\ (FG+2HF)^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} FG^2-2EG(FG+2FH)+EG^2+(FG+2FH)^2$$

$$\text{somit } 0 \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix}FG^2-2EG(FG+2FH)+EG^2 \\ FG^2-2FG.GE+EG^2-4FH.EG\end{matrix}\right.$$

$$\text{also } 4FH.EG \overset{=}{<} FE^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}FH.EG \\ EM.FN\end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}FE^2\ ;$$

mithin erreicht die Linie MN den Halbkreis in einem Punkte R, so dass

$FL.LE = EM.FN$ (S. die Bücher des Apollonius von Perga de sectione rationis, frey bearbeitet von Diesterweg, Berlin 1824. p. 1.)

$$= FH.EG$$

$$\text{demnach } HF:FL = LE:EG$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}HL:LF \\ OH:Fx\end{matrix}\right\} = LG:GE$$

folglich $Fx.LG = OH.GE$
$= q^2$.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es in beiden Fällen eine einzige, oder eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt, je nachdem die Linie MN berührt, oder schneidet.

Algebr. Auflösung.

Es muss nach Obigem der Punkt L so bestimmt werden, dass $FL.LE = HF.EG$ wird. Setzt man $FL = x$, also $LE = FE - x$, so muss seyn

$$x(FE - x) = HF.EG$$

$$\text{also } x^2 - FE.x + \tfrac{1}{4}FE^2 = \tfrac{1}{4}FE^2 - HF.EG$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } x &= \tfrac{1}{2}FE \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}FE^2 - HF.EG)} \\ &= \tfrac{1}{2}(FG-GE) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG-GE)^2 - HF.EG)} \\ &= \tfrac{1}{2}(FG-\tfrac{q^2}{OH}) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG-\tfrac{q^2}{OH})^2 - HF.\tfrac{q^2}{OH})} \end{aligned}$$

$$\text{mithin } x = \frac{\tfrac{1}{2}(FG.OH-q^2) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}(FG.OH-q^2)^2 - HF.OH.q^2)}}{OH}$$

Zusatz 1.

Es hat x zwey, einander gleiche, oder ungleiche, reelle positive Werthe, wenn

$$\tfrac{1}{4}(FG.OH - q^2)^2 \overset{=}{>} FH.HO.q^2$$

$$\text{also } FG^2.OH^2 - 2FG.OH.q^2 + q^4 \overset{=}{>} 4FH.HO.q^2$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} q^4 - 2(FG + 2FH)OH.q^2 \\ q^4 - 2(GH + HF)OH.q^2 \end{array}\right\} \overset{=}{>} -FG^2.OH^2$$

somit $q^4 - 2(GH+HF)OH.q^2 + (GH+HF)^2.OH^2 \overset{=}{>} \begin{cases} (FG+2FH)OH^2 - FG^2.OH^2 \\ (FG^2+4GF.FH+4FH^2)OH^2 - FG^2.OH^2 \\ 4(GF+FH)FH.OH^2 \\ 4\,GH.HF.OH^2 \end{cases}$

demnach entweder $q^2 - (GH+HF)OH \overset{=}{>} 2\sqrt{(GH.HF)}\,HO$

also $q^2 \overset{=}{>} (GH.HF + 2\sqrt{(GH.HF)})OH$

oder $(GH+HF)OH - q^2 \overset{=}{>} 2\,OH\sqrt{(GH.HF)}$

also $q^2 = (GH+HF-2\sqrt{(GH.HF)})OH.$

Daraus erhellet, dass, weil die beiden oben angedeuteten Fälle ihre Determination in demselben Ausdrucke liegen haben, der doppelte Werth jener Wurzel von $q^4 - 2(GH+HF)OH.q^2 + (GH+HF)^2OH^2$ eine reelle Bedeutung habe.

Zusatz 2.

Die Geometrie legt wieder die Linien, welche die Algebra mit dem Zeichen (+) behaftet, von F aus in dieselbe Richtung.

Aufgabe XXV. (Fig. 25.).

Ein Dreieck auf einer Grundlinie = der gegebenen geraden Linie a zu beschreiben, in welchem die Radien der um und in dasselbe zu beschreibenden Kreise den gegebenen geraden Linien R, r gleich seyen.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn BC als der Lage nach gegeben angenommen wird, der um dasselbe zu beschreibende Kreis der Lage und Grösse nach

gegeben. Zieht man die, die Spitze A und den Mittelpunkt D des in das Dreieck beschriebenen Kreises verbindende, gerade Linie AD, so ist BAD=DAC, oder, wenn die Verlängerung von AD den grösseren Kreis in G schneidet, BAG = GAC, also arc. BG = arc.GC, mithin der Punkt G, somit die gerade Linie BG gegeben.

$$\text{Ferner ist } GBD = GBC + CBD$$
$$= \left\{\begin{matrix} GAC \\ DAB \end{matrix}\right\} + DBA$$
$$= GDB$$

$$\text{also } BG = GD;$$

mithin liegt der Punkt D auf dem Umfange eines gegebenen Kreises.

Fällt man von D auf BC das Perpendikel DL, so ist DL = r, folglich liegt der Punkt D auch auf einer, der Linie BC in einer Entfernung = r parallel gezogenen, geraden Linie, mithin ist er gegeben, somit die von dem Punkte B an den aus D als Mittelpunkte mit einem Radius = r beschriebenen Kreis gelegte Tangente, also auch der Durchschnitt derselben mit der Verlängerung der Linie GD, folglich das Dreieck ABC gegeben.

Construction.

Man mache BC = a, beschreibe um BC als Sehne einen Kreis, dessen Radius = R, halbire dessen Bogen BGC in G, ziehe die gerade Linie GB, beschreibe aus G als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = GB, halbire BC in F, ziehe die gerade Linie GF, nehme auf der Verlängerung derselben KF = r, ziehe der Linie BC die Linie KD parallel, welche dem Kreise, dessen Mittelpunkt G ist, in D begegne, beschreibe aus D als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = r, lege an denselben die Tangente BA, welcher die gerade Linie GD in

ihrer Verlängerung in A begegne, und ziehe die gerade Linie AC, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Determination.

Damit die Linie KD den Kreis erreiche, dessen Mittelpunkt G ist, muss, wenn die verlangerte GF dem Bogen BHC in H begegnet,

$$r \underset{<}{=} \begin{cases} FH \text{ seyn;} \\ HG - GF \\ BG - GF \end{cases}$$

$$\text{also } r + GF \underset{<}{=} BG$$

$$\text{folglich } r^2 + 2r.GF + GF^2 \underset{<}{=} \begin{cases} BG^2 \\ BF^2 + FG^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } r^2 + 2r.GF \underset{<}{=} \begin{cases} BF^2 \\ \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} GF \\ \left.\begin{matrix} GO \\ R \end{matrix}\right\} - OF \end{matrix}\right\} \underset{<}{=} \frac{\frac{1}{4}a^2 - r^2}{2r}$$

$$\text{demnach } R - \frac{\frac{1}{4}a^2 - r^2}{2r} \underset{<}{=} OF$$

$$\text{also } \left(R - \frac{\frac{1}{4}a^2 - r^2}{2r}\right)^2 \underset{<}{=} \begin{cases} OF^2 \\ R^2 - \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } \left(\frac{2Rr - \frac{1}{4}a^2 + r^2}{2r}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 \underset{<}{=} R^2$$

$$\text{mithin } 4R^2r^2 - Rra^2 + \tfrac{1}{16}a^4 + 4Rr^3 - \tfrac{1}{2}a^2r^2 + r^4 + a^2r^2 \underset{<}{=} R^2.4r^2$$

$$\text{somit } -Rra^2 + \tfrac{1}{16}a^4 + 4Rr^3 + \tfrac{1}{2}a^2r^2 + r^4 \underset{<}{=} 0$$

demnach $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{2}a^2r^2+r^4 \underset{<}{=} Rr(a^2-4r^2)$

$$\text{also}\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{r(a^2-4r^2)}\\[2ex] \dfrac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}\\[2ex] \dfrac{(\frac{1}{4}a^2+r^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}\end{matrix}\right\} \underset{<}{=} R.$$

Beweis.

$$\text{Es ist}\quad \frac{(\frac{1}{4}a^2+r^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)} \underset{<}{=} R$$

$$\text{also}\quad \left(\frac{2Rr-\frac{1}{4}a^2+r^2}{2r}\right)^2 \underset{<}{=} \left\{\begin{matrix}R^2-\frac{1}{4}a^2\\ OF^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich}\quad R-\frac{\frac{1}{4}a^2-r^2}{2r} \underset{<}{=} OF$$

$$\text{mithin}\quad \left.\begin{matrix}R-OF\\ GF\end{matrix}\right\} \underset{<}{=} \frac{\frac{1}{4}a^2-r^2}{2r}$$

$$\text{somit}\quad 2r.GF \underset{<}{=} \tfrac{1}{4}a^2-r^2$$

$$\text{demnach}\quad r^2+2r.GF \underset{<}{=} \left\{\begin{matrix}\frac{1}{4}a^2\\ BF^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{also}\quad r^2+2rGF+GF^2 \underset{<}{=} \left\{\begin{matrix}BF^2+FG^2\\ BG^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich}\quad r+GF \underset{<}{=} BG$$

$$\text{mithin } \begin{matrix} r \\ FK \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} BG - GF \\ FH \end{matrix};$$

demnach erreicht die Linie DK den Kreis, dessen Mittelpunkt G ist.

$$\text{Auch ist } DG = GB$$

$$\text{also } \begin{matrix} GBD \\ CBD + CBG \end{matrix} \left\{ = \right\} \begin{matrix} GDB \\ GAB + ABD \end{matrix}$$

$$\text{folglich } \begin{matrix} CBG \\ BCG \end{matrix} \Big\} = DAB;$$

mithin liegt der Punkt A auf dem Umfange des Kreises BGC. Demnach ist $GAC = GBC = DAB$, also ist AC eine Tangente des Kreises NLM, folglich hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung des Kreises, dessen Mittelpunkt G ist, durch die gerade Linie KD, ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites, durch den zweiten Durchschnitt D'' bestimmtes, Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Zusatz 2.

Macht man auch $KF = r$, zieht die den Kreis, dessen Mittelpunkt G ist, in D' schneidende Linie $K'D'$ der Linie BC parallel, fällt auf BC das Perpendikel $D'L'$, beschreibt einen Kreis, welcher D' zum Mittelpunkte, und $D'L'$ zum Radius hat, legt an denselben die Tangente BM', welche von der Linie GD' in A' geschnitten werde, so ist

$$\begin{matrix} GBD' \\ CBD' - CBG \end{matrix} \left\{ = \right\} \begin{matrix} GD'B \\ GA'B - A'BD' \end{matrix}$$

$$\text{folgl. } \left.\begin{array}{l} CBD' + \left\{\begin{array}{l}A'BD'\\ D'BL'\\ ABC\end{array}\right\} - GA'B \\ \quad 2R - GA'B \\ \quad BA'D' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}CBG\\ BCG\end{array}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{array}{l} BA'D' + BA'G \\ 2R \end{array}\right\} = BCG + BA'G;$$

demnach liegt der Punkt A' auf dem Umfange des Kreises $BA'C$, also ist $\left.\begin{array}{l} GA'C \\ NA'D' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} GBC \\ BA'D' \end{array}\right.$, folglich berührt die Linie CA' den Kreis, dessen Mittelpunkt D' ist. Da er auch von CB in L' berührt wird, so ist $\triangle BA'C$ ein auf der gegebenen Grundlinie BC beschriebenes Dreieck, welches in den Kreis BGC, dessen Radius $= R$ ist, beschrieben ist, und von dem Kreise, dessen Radius $= r$ ist, auswendig berührt wird.

Zusatz 3.

Es erhellet von selbst, dass der zweite Durchschnitt D''' der Linie $K'D'$ mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt G ist, ein zweites Dreieck mit den gegebenen Eigenschaften bestimmt.

Zusatz 4.

Sucht man die Determination für diesen Fall, so muss, damit die Linie $K'D'$ dem Kreise, dessen Mittelpunkt in G ist, begegne,

$$\left.\begin{array}{r} FK' \\ r \end{array}\right\} \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \left\{\begin{array}{c} FH' \\ FG + GH' \\ BG + GF \end{array}\right\}$$

seyn, wenn H' den Endpunkt der Sehne HGH' bezeichnet;

$$\text{also } r - GF \overset{=}{<} BG$$

$$\text{folglich } r^2 - 2r.GF + GF^2 \overset{=}{<} \begin{cases} BG^2 \\ BF^2 + FG^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } r^2 - 2r.GF \overset{=}{<} \begin{cases} BF^2 \\ \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

$$\text{somit } \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r} \overset{=}{<} \begin{cases} GF \\ \begin{Bmatrix} GO \\ R \end{Bmatrix} - OF \end{cases}$$

$$\text{demnach } OF \overset{=}{<} R - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} OF^2 \\ R^2 - \frac{1}{4}a^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left(R - \frac{r^2 - \frac{1}{4}a^2}{2r}\right)^2$$

$$\text{folglich } R^2 \overset{=}{<} R^2 - \frac{R}{r}(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2) + \frac{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{4r^2} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\text{mithin } \frac{R}{r}(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \overset{=}{<} \frac{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{4r^2} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} 4Rr^3 - Rra^2 \\ R(4r^2 - a^2)r \\ 4Rr(r^2 - \frac{1}{4}a^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \begin{cases} (r^2 - \frac{1}{4}a)^2 + a^2r^2 \\ (r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2 \end{cases}$$

$$\text{demnach } R \overset{=}{<} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}.$$

Zusatz 5.

Ist $r^2 > \frac{1}{4}a^2$, so muss, damit der letzte Durchschnitt statt finde, $R \overset{=}{<} \frac{(r^2 + \frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ seyn. Alsdann aber

ist zugleich $R \overset{=}{<} \frac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)}{(\frac{1}{4}a^2-r)^2}$, mithin ist, weil $\frac{r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}$ negativ wird, $R < \frac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}$; demnach findet die Bedingung der ersten Auflösung, dass $R^2 \overset{=}{>} \frac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}$ nicht statt, d. h. diese Auflösung findet nicht statt. Ist dagegen $\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{>} r^2$, so ist $R < \frac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(r^2-\frac{1}{4}a^2)}$, also findet die zweite Auflösung statt. Damit die erste statt habe, muss nunmehr $R \overset{=}{>} \frac{(r^2+\frac{1}{4}a^2)^2}{4r(\frac{1}{4}a^2-r^2)}$ seyn. Es können also in diesem Falle beide Auflösungen zugleich statt haben, oder nur die eine. Desshalb hätte man in dem Beweise der Aufgabe, als man dahin gekommen war, dass $r^2+2r.GF+GF^2 \overset{=}{<} BG^2$ sey, auch folgern sollen, dass $-r-GF \overset{=}{<} BG$ sey, oder da $-r$ nichts anderes ist, als K'F, weil KF $= +r$ gesetzt wurde, dass $K'F-GF \overset{=}{<} BG$ sey,

---

$$\text{also } K'F \overset{=}{<} \begin{cases} BG+GF \\ FH'; \end{cases}$$

folglich K'F' den Umfang des Kreises, welcher D zum Mittelpunkte hat, erreiche, u. s. w. Es ist mithin auch in Fällen, wie der vorliegende, das negative Zeichen vor der Wurzelgrösse durchaus nicht ohne Bedeutung, und nicht unbrauchbar.

Zusatz 6.

Wenn ein Dreieck ABC in dem grösseren Kreise, und um den kleineren liegt, so ist nach Obigem

$$BG = GD$$

$$\text{also}\ \left.\begin{matrix} BG^2 \\ BF^2+FG^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GD^2 \\ GK^2+KD^2 \end{matrix}\right.$$

$$= (GF+FK)^2 + DO^2 - \left\{\begin{matrix} OK^2 \\ (KF-FO)^2 \end{matrix}\right.$$

$$= GF^2 + 2\,GF.FK + KF^2 + DO^2 - KF^2 + 2KF.FO - FO^2$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix} BF^2+FO^2 \\ BO^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 2FK(GF+FO)+DO^2 \\ = 2FK.GO+DO^2 \end{matrix}$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{matrix} BO^2 - 2FK.GO \\ R^2 - 2R.r \end{matrix}\right\} = DO^2.$$

Zusatz 7.

Wenn ein Dreieck $A'BC$ in einen Kreis AGC beschrieben ist, und von einem anderen Kreise $BM'N'$ auswendig berührt wird, so ist

$$GBD' = CBD' - GBC$$

$$= 2R - \left\{\begin{matrix} CBA \\ D'BL' \\ D'BA' \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} GA'C \\ D'A'N' \\ D'A'B \end{matrix}\right.$$

$$= A'D'B$$

$$= GD'B$$

$$\text{also}\ BG = GD'$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix} BG^2 \\ BF^2+FG^2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} GD'^2 \\ GK'^2+K'D'^2 \end{matrix}\right.$$

$$= (GF-FK')^2 + D'O^2 - \left\{\begin{matrix} OK'^2 \\ (K'F+FO)^2 \end{matrix}\right.$$

$$= GF^2 - 2GF.FK' + K'F^2 + D'O^2 - K'F^2 - 2K'F.FO - OF^2$$

$$\text{mithin}\ \left.\begin{matrix} BF^2+FO^2 \\ BO^2 \end{matrix}\right\} = D'O^2 - \left\{\begin{matrix} 2FK'(GF+FO) \\ 2FK'.GO \end{matrix}\right.$$

somit $\left.\begin{matrix} BO^2 + 2FK'.GO \\ R + 2Rr \end{matrix}\right\} = D'O^2$.

Aufgabe XXVI. (Fig. 26.)

Ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten geometrisch proportionirt seyen, und worin eine Seite der gegebenen geraden Linie a gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Es sey die Hypotenuse = a, die kleinere Kathete = x, die grössere = y, so muss seyn

$$a:y = y:x$$

$$\text{also } ax = y^2$$
$$= a^2 - x^2$$

$$\text{folglich } x^2 + ax = a^2$$

$$\text{mithin } x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2.$$

$$\text{somit } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}a(-1 \mp \sqrt{5}).$$

Zusatz.

Es hat x zwey Werthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist, der positive Werth kleiner, der negative aber, der absoluten Grösse nach, grösser, als a ist.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck, seine Hypotenuse = a, also $CB:BA = BA:AC$

$$\text{so ist } AC.CB = BA^2$$
$$= BC^2 - CA^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{mithin } AC.CB+CA^2 \\ AC(BC+CA) \\ AC(a+AC) \end{array}\right\} \begin{array}{l} = BC^2. \\ = a^2 \\ \end{array}$$

Da a gegeben ist, so ist AC, somit $\triangle ABC$ gegeben.

Construction.

Man nehme BC = der gegebenen geraden Linie a, halbire sie in D, richte auf ihr das Perpendikel CE auf, mache EC = CB, ziehe die gerade Linie DE, beschreibe aus D als Mittelpunkte einen Kreis mit einem Radius = DE, welcher der verlängerten BC in F begegne, beschreibe über BC einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne AC = CF, und ziehe die gerade Linie BA, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Es ist } BF.FC \\ (BC+CF)FC \\ (BC+CA)AC \end{array}\right\} \begin{array}{l} = CE^2 \\ = CB^2 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{also } BC.CA & = BC^2 - CA^2 \\ & = BA^2 \end{array}$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{c} CB \\ a \end{array}\right\} :BA = BA:AC^2;$$

mithin ist ein rechtwinkliges Dreieck gefunden, worin die Hypotenuse = a ist, und die Seiten geometrisch proportionirt sind.

Zusatz 1.

Macht man CB′ = CB, errichtet in B′ ein Perpendikel C′A′ auf CB′, legt in den Winkel CB′A′ die gerade Linie CA′ = CF′, wenn F′ den anderen Durchschnitt des Kreises, welcher D zum Mittelpunkte hat, mit der verlängerten CB bezeichnet,

$$\text{so ist}\quad \left.\begin{array}{l} BF'.F'C \\ (F'C-CB)F'C \\ (A'C-CB)A'C \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} CE^2 \\ CB'^2 \end{array}\right.$$

$$\text{also}\quad \left.\begin{array}{l} A'C^2-CB'^2 \\ A'B'^2 \end{array}\right\} = A'C.CB'$$

$$\text{folglich}\quad CB':B'A' = B'A':A'C.$$

Mithin ist ein rechtwinkeliges Dreieck $A'B'C$ gefunden, in welchem die Seiten geometrisch proportionirt sind, und eine Kathete $= a$ ist.

Zusatz 2.

$$\text{Da}\quad CB:BA = BA:AC$$

$$\text{so ist auch}\quad CB^2 : \left\{\begin{array}{l} BA^2 \\ CB.BG \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} BA^2 : AC^2 \\ CB.BG : BC.CG, \end{array}\right.$$ wenn man AG perpendikular auf BC zieht;

$$\text{also}\quad CB:BG = BG:GC$$

$$\text{folglich}\quad ML:LK = LK:KM,$$ wenn BL die Verlängerung von AB ist, F'L#AC, LM #BC gezogen, u. AB, AG bis zum Durchschnitte mit LM in M und K verlängert werden;

$$\text{mithin}\quad LK' = KM.ML.$$

Eben so ist $CA':A'B' = A'B':B'C$, wenn $B'HA' = R$;

$$\text{also } CA'^2 : \begin{cases} A'B'^2 \\ CA'.A'H \end{cases} = \begin{cases} A'B'^2 : B'C^2 \\ CA'.A'H : A'C.CH \end{cases}$$

$$\text{folglich } CA' : A'H = A'H : HC$$

$$\text{mithin } A'H^2 = HC.CA'.$$

Da $ML = CF' = CA'$, so ist $A'H = LK$

$$\text{somit } KM = CH$$

$$\text{demnach } \triangle ALM \cong \triangle A'B'C$$

$$\text{also } A'CB'^2 = AML$$
$$= ACB,$$

folglich CA' die Verlängerug von CA.

Zusatz 3.

Der positive Werth von $x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$ bezeichnet die gerade Linie CF, der negative die ihr gerade entgegengesetzt liegende CF', und es bestimmt diese, wie jene, ein Dreieck, mit den gegebenen Eigenschaften, ganz und gar in dem Sinne der Aufgabe.

Zusatz 4.

Wäre die algebraische Rechnung zuerst für das Dreieck A'B'C' geführt worden, in welchem die Kathete B'C $= a$ gesetzt, CA' mit x, A'B' mit y bezeichnet sey, so hätte gesetzt werden müssen

$$x:y = y:a$$

$$\text{also } ax = y^2$$
$$= x^2 - a^2$$

$$\text{folglich } a^2 = x^2 - ax$$

$$\text{mithin } \tfrac{5}{4}a^2 = (x - \tfrac{1}{2}a)^2$$

$$\text{somit } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5});$$

und der positive Werth von diesem x wäre dem negativen des oben gefundenen, der negative dem positiven des oben gefundenen, der absoluten Grösse nach, gleich geworden.

Aufgabe XXVII. (Fig. 27.)

In einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Zehneck zu beschreiben.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BD eine Seite des gesuchten Zehnecks, so wäre, wenn die Radien BA, AD gezogen werden,

$$BAD = \tfrac{4}{10} R$$
$$= \tfrac{2}{5} R$$

also $ABD = \tfrac{4}{5} R = ADB$

folglich $BDC = \tfrac{2}{5} R = CDA = CAD$, wenn der Winkel ADB durch DC halbirt wird;

mithin $BCD = \tfrac{4}{5} R$, $\left.\begin{matrix} DC \\ BD \end{matrix}\right\} = CA$

somit $AB : \left\{\begin{matrix} BD' = DB \\ AC = AC \end{matrix}\right\} : BC$

demnach $AC^2 = AB.BC$

also die Linie $\left\{\begin{matrix} AC \\ BD \end{matrix}\right\}$ gegeben (El. II, 11.)

Construction.

Man ziehe den Diameter BL, lege auf denselben den perpendikularen Halbmesser AH, halbire den Radius AL

in E, ziehe die gerade Linie KH, mache KC = KH, und lege in den Kreis die Sehne BD = AC, so ist BD die Seite des gesuchten Zehnecks.

Beweis.

Es ist (verm. El. II. 11.) $\left.\begin{matrix}AC^2\\ BD^2\end{matrix}\right\} = AB.BC$

also AB:BD = DB:BC

folglich $\left.\begin{matrix}ADB\\ ABD\end{matrix}\right\} = BCD$ (El. VI, 6.)

mithin CD = DB
= AC

demnach CAD = ADC

somit $\left.\begin{matrix}BCD\\ ABD\end{matrix}\right\} = 2\,BAD$

folglich BAD = $\frac{2}{5}$ R
= $\frac{4}{10}$ R,

mithin ist BD die Seite eines in den Kreis zu beschreibenden regelmassigen Zehnecks.

Zusatz.

Macht man auch CK = KH, nimmt BD′ = AC′ in entgegengesetzter Richtung mit BD, gleichwie AC, AC′ in entgegengesetzter Richtung liegen, macht D′A′ # AD, und verlängert AB bis zum Durchschnitte mit D′A′ in A,

so ist D′A′ : A′B = DA : AB

also D′A′ = A′B.

Auch ist D′A′B = DAB
= $\frac{2}{5}$ R.

Beschreibt man also einen Kreis, welcher A' zum Mittelpunkt und A'B zum Radius hat, so ist BD' die Seite eines in diesen Kreis zu beschreibenden regelmässigen Zehnecks.

Algebraische Auflösung.

Setzt man die Linie AC = x, so muss seyn

$$x^2 = a(a-x)$$

$$\text{also } x^2 + ax = a^2$$

$$\text{folglich } x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$\text{mithin } x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2},$$

von welchen Werthen der dem $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Zeichen der Wurzel entsprechende die Linie $\left\{\begin{matrix}AC\\ AC'\end{matrix}\right\}$, oder $\left\{\begin{matrix}BD\\ BD'\end{matrix}\right\}$ bezeichnet.

Zusatz.

Bestimmt man r so, dass

$$CA : AB = AC' : r$$

$$\text{d. i. } \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a : a = \sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} + \tfrac{1}{2}a : r$$

$$\text{so ist } r = a\frac{\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{(\tfrac{5}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a}.$$

Beschreibt man einen Kreis, dessen Mittelpunkt A' auf der Verlängerung von BA und Radius A'B = r ist, so ist die Seite y des in denselben beschreibbaren regulären Zehnecks $= -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}r^2)}$, und der positive Werth von y

$$= -\tfrac{1}{2}r\sqrt{\tfrac{5}{4}r^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a\frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a} + \sqrt{\left(\tfrac{5}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a}{\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a}\left(\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a\right)$$

$$= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a$$

$$\text{also } y - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$\text{folglich } y^2 - ay + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

mithin $y^2 - ay = a^2$. Da auch $x^2 + ax = a^2$ war, so ist der positive Werth von y dem negativen von x gleich. Und die Gleichung $x^2 = a(a-x)$ löset also zugleich die Aufgabe auf, in jenen zweiten Kreis ein regelmässiges Zehneck zu beschreiben, weil die Gleichungen für die Seiten der Zehnecke einerley werden.

Aufgabe XXVIII. (Fig. 28.)

Zwey ähnliche gerade Kegel zu beschreiben, deren Unterschied der Höhen = h Fuss, Unterschied der körperlichen Volumina = b Cubikfuss sey, und wovon der kleinere den Radius der Grundfläche = a Fuss habe.

Auflösung.

Es sey die Höhe RQ des kleineren RPL = x, also des grösseren = x + h, so ist, wenn ST den Radius der Grundfläche des grösseren RTV bezeichnet,

$$x : a = x + h : ST$$

$$\text{also } ST = a\,\frac{x+h}{x}$$

$$\text{folglich } \pi . ST^2 = \pi a^2 \left(\frac{x+h}{x}\right)^2$$

$$\text{somit Kegel RTV} = \frac{\pi a^2(x+h^2}{3x^2}(x+h)$$

$$= \frac{\pi a^2 (x+h)^3}{3x^2}$$

Der Inhalt des Kegels RPL ist

$$= \frac{\pi a^2 x}{3}$$

$$= \frac{\pi a^2 x^3}{3 x^2}$$

mithin ist der Unterschied b

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{\pi a^2}{3 x^2}((x+h)^3 - x^3) \\ = \dfrac{\pi a^2}{3 x^2}(3 h x^2 + 3 h^2 x + h^3) \end{array}\right.$$

demnach $3 x^2 b = 3 \pi a^2 h x^2 + 3 \pi a^2 h^2 x + \pi a^2 h^3$

somit $3(b - \pi a^2 h) x^2 - 3 \pi a^2 h^2 x = \pi a^2 h^3$

also $x^2 - \frac{\pi a^2 h^2}{(b - \pi a^2 h)} x = \frac{\pi a^2 h^3}{3(b - \pi a^2 h)}$

folglich $\left(\frac{x - \pi a^2 h^2}{(b - \pi a^2)}\right) = \frac{\pi^2 a^4 h^4}{4(b - \pi a^2 h)^2} + \frac{\pi a^2 h^3}{3(b - \pi a^2 h)}$

$$= \pi^2 a^2 h^3 \left(\frac{a^2 h}{4(b - \pi a^2 h)^2} + \frac{1}{3\pi(b - \pi a^2 h)}\right)$$

$$= \pi^2 a^2 h^3 \frac{3 \pi a^2 h + 4(b - \pi a^2 h)}{12 \pi (b - \pi a^2 h)^2}$$

$$= \pi a^2 h^3 \frac{4 b - \pi a^2 h}{12 (b - \pi a^2 h)^2}$$

mithin $x = \frac{\pi a^2 h^2}{2(b - \pi a^2 h)} \pm \frac{a h \sqrt{\left(\pi h \frac{4 b - \pi a^2 h}{3}\right)}}{2(b - \pi a^2 h)}$

$$= \frac{a h}{2(b - \pi a^2 h)}\left(\pi a h \pm \sqrt{\left(\pi h \frac{4 b - \pi a^2 h}{3}\right)}\right)$$

Beispiel. Es sey $a = \frac{1}{2}$, $h = 1$, $b = \frac{13}{16}\pi$, so ist

$$x = \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{13}{16}\pi - \frac{1}{4}\pi)}\left(\frac{1}{2}\pi \pm \sqrt{\left(\frac{\pi \frac{13}{4} - \frac{1}{4}\pi}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4 \cdot \frac{9}{16}\pi}\left(\frac{1}{2}\pi \pm \sqrt{(\pi . \pi)}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2} \pm 2\right)$$
$$= \frac{2}{9}(1 \pm 2),$$

also hat x zwey Werthe.

Es ist entweder $x = \frac{2}{3}$

oder $x = -\frac{2}{9}$.

Zusatz 1.

Da die Algebra die einander der Lage nach entgegengesetzten Linien durch die Zeichen + — unterscheidet, so bezeichnet der Werth von $x = \frac{2}{3}$ die Linie QR $= \frac{2}{3}$, und der Werth von $x = -\frac{2}{9}$ die derselben entgegengesetzt liegende $QR' = \frac{2}{9}$. Es wird zugleich

$h + x$ entweder $= \frac{5}{7}$

oder $= \frac{7}{9}$;

und r entweder $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{4}$

oder $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}}{\frac{2}{9}} = -1\frac{3}{4}$;

Kegel RTV entweder $= \pi . \frac{25}{16} . \frac{5}{9} = \pi . \frac{125}{144}$

oder $= \pi . \frac{49}{16} . \frac{7}{27} = \pi . \frac{343}{432}$;

Kegel RPL entweder $= \pi . \frac{1}{4} . \frac{2}{9} = \frac{1}{18}\pi$.

oder $= \pi . \frac{1}{4} . -\frac{2}{27}\pi = -\frac{1}{54}\pi$.

mithin ist Kegel RTV — Kegel RPL

entweder $= (\frac{125}{144} - \frac{1}{18})\pi = \frac{125 - 8}{144}\pi = \frac{117}{144}\pi = \frac{39}{48}\pi = \frac{13}{16}\pi$

oder $= (\frac{343}{432} + \frac{1}{54})\pi = \frac{343 + 8}{432}\pi = \frac{351}{432}\pi = \frac{13}{16}\pi$.

Zusatz 2.

Die Algebra unterscheidet zwey Kegel, welche eine Lage haben, wie PRL, PR'L durch die Zeichen + —. Da die Cylinder die dreifachen der Kegel von derselben

Grundfläche und Höhe sind, so werden auch die jenen Regeln correspondirenden Cylinder durch $+-$ unterschieden. Aehnliches gilt von Pyramiden und Prismen.

Zusatz 3.

Es lösste obige Aufgabe zugleich die Aufgabe auf, zwey ähnliche gerade Kegel T'R'V', PR'L zu beschreiben, in welchen die Summe der Höhen $= h$, die Summe der körperlichen Räume $= b$, und der Radius der Grundfläche des einen $= a$ sey.

Aufgabe XXIX.

Unter allen geradstehenden Parallelepipedis, deren Inhalt dem Würfel der gegebenen geraden Linie c gleich ist, und welche eine Seitenlinie = der gegebenen geraden Linie a haben, dasjenige zu bestimmen, dessen Oberfläche ausgezeichnet ist.

Auflösung.

Ist die zweite Seitenlinie $= x$, also die dritte $= \frac{c^3}{ax}$,

so ist die Oberfläche $= 2ax + 2\frac{c^3}{x} + 2.\frac{c^3}{a}$

also die halbe Oberfläche $\left.\right\}$ y $= ax + \frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{a}$

folglich $\frac{dy}{dx} = a - \frac{c^3}{x^2}$.

Damit y einen ausgezeichneten Werth erhalte, muss

mithin $a - \frac{c^3}{x^2} = 0$ seyn

$$\text{folglich} \quad x^2 = \frac{c^3}{a}$$

$$\text{somit} \quad x = \pm \sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}.$$

$$\text{demnech} \quad \frac{c^3}{ax} = \pm \frac{c^3}{a\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}.$$

$$\text{Ferner ist} \quad \frac{d^2.y}{dx^2} = \frac{2c^3x}{x^4}$$

$$= \frac{2c^3}{x^3}$$

$$= 2\left(\frac{c}{x}\right)^3$$

$$= \pm 2\left[\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}}\right]^3$$

$$= \pm 2\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Also ist y ein Minimum für $x = +\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$, ein Maximum für $x = -\sqrt{\left(\frac{c^5}{a}\right)}$. Und es ist

$$y = \pm a\sqrt{\frac{c^3}{a}} \pm \frac{c^3}{\sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}} + \frac{c^3}{a}$$

$$= \pm\sqrt{(ac^3)} \pm \sqrt{(ac^3)} + \frac{c^3}{a}$$

$$= \frac{c^3}{a} \pm 2\sqrt{(ac^3)}$$

Anmerkung 1.

Der Werth $x = + \sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$ beantwortet die Frage in dem Sinne der Aussage, und bestimmt die Dimensionen des Parallelepipedums, dessen Oberfläche ein Minimum ist. Für den Werth $x = - \sqrt{\left(\frac{c^3}{a}\right)}$ werden die von x abhängigen Seitenflächen negativ, und es bestimmt derselbe die Dimensionen desjenigen Parallelepipedums, in welchem der Ueberschuss der einen Seitenfläche über die von x abhängigen ein Maximum wird. Gleichwie die Algebra immer die positiven und negativen Werthe von x bestimmt, welche einer Gleichung Genüge leisten, so fasst sie in einer einzigen Gleichung die Beantwortung der Fragen zusammen, unter welchen Umständen die Summe dreyer Seitenflächen eines Parallelepipedums, oder der Ueberschuss einer derselben über die übrigen einen ausgezeichneten Werth erhalte.

Anmerkung 2.

Das andere Parallelepipedum fällt in den Verticalwinkel desjenigen, in welchen das erste fällt. Da aber der Inhalt beider $= c^3$, so unterscheidet die Algebra zwey in dieser Weise gelegene einander gleiche Parallelepipeda nicht durch die Zeichen + —.

Aufgabe XXX.

Wenn g den freien Fallraum eines Körpers in der ersten Secunde bezeichnet, zu finden, nach wie viel Se-

cunden er sich am Ende einer verticalen Linie von S Fuss befinden werde.

Auflösung.

Es ist, wenn t die gesuchte Anzahl der Secunden bezeichnet,

$$S = gt^2$$

$$\text{also } t^2 = \frac{S}{g}$$

$$\text{folglich } t = \pm \frac{S}{g}.$$

Zusatz.

Fragt man: vor wie viel Secunden befand sich ein Körper beim freien Fall an dem Ende einer verticalen Höhe von S Fuss? und bezeichnet man die gesuchte Zahl von Secunden durch t, so ist

$$S = gt^2$$

$$\text{also } t^2 = \frac{S}{g}.$$

mithin ist $\frac{S}{g}$ der Ausdruck für das Quadrat sowohl der einen, als der anderen Zahl von Secunden, und die Algebra giebt desshalb die beiden Werthe an, indem sie sagt, es sey $t = \pm \sqrt{\left(\frac{S}{g}\right)}$, wodurch sie die zukünftige Zeit durch +, die vergangene durch — bezeichnet, oder umgekehrt.

Aufgabe XXXI. (Fig. 29.)

Eine Glasröhre CALN, deren Länge = 60 Fuss, und welche unten verschlossen, oben offen ist, sey bis

zu der Höhe AB = $54\frac{6}{7}$ Fuss mit Queksilber, in dem Raum BN mit athmosphärischer Luft gefüllt. Sie werde umgedreht, und berühre mit der unteren Oeffnung die Oberfläche PQ eines mit Quecksilber gefüllten Gefässes. Man fragt, bis zu welcher Entfernung von dem Punkte F das Quecksilber in der umgekehrten Röhre sinken werde.

Auflösung.

Das Quecksilber wird bis zu einem Punkte E sinken, dass der Druck der in der Röhre FEGA eingeschlossenen Luft, welche früher in dem Raume CBMN sich befand, und der Druck des Quecksilbers in der Röhre DG dem Drucke der athmosphärischen Luft, welcher dem Druck einer Quecksilbersäule von 28 Zoll gleich gesetzt werde, gleich ist. Nach dem Mariottischen Gesetze findet man, da die Luft in dem Raume CBMN durch die athmosphärische Luft mit einer Kraft, welche dem Drucke einer Quecksilbersäule von 28 Zoll gleich kam, gedrückt wurde, die Länge u der Quecksilbersäule, welche dem Drucke der in der Säule FEGA, deren Länge = z gesetzt werde, befindlichen Luft das Gleichgewicht hält, durch die Proportion

$$\underbrace{60 - 54\tfrac{6}{7}}_{5\frac{1}{7}} : z = u : 28 .$$

$$\text{also } u = \frac{28 . 5\frac{1}{7}}{z}$$

$$= \frac{144}{z}$$

$$\text{mithin ist } \frac{144}{z} + 60 - z = 28$$

$$\text{folglich } 144 + 60z - z^2 = 28z$$

$$\text{somit } 144 = z^2 + (28 - 60)z$$
$$= z^2 - 32z$$

$$\text{demnach } \left.\begin{matrix}144+16^2\\144+256\\400\end{matrix}\right\} = (z-16)^2$$

$$\text{also } \pm 20 = z - 16$$

$$\text{folglich } z = \pm 20 + 16$$
$$= \left\{\begin{matrix}+36\\-4\end{matrix}\right\}.$$

Zusatz.

Der erste Werth von z beantwortet die Frage, wie lang die Luftröhre FE werde, damit der Druck derselben mit dem Drucke der Quecksilberröhre DE zusammengenommen dem Druck einer Quecksilberröhre von 28 Zoll das Gleichgewicht halte. Die Algebra giebt in jeder Gleichung, wie obige, auch die negativen Werthe der unbekannten Grösse an, welche der Gleichung Genüge leisten. Sie antwortet desshalb zugleich auf die Frage, wie lang die Luftröhre werde, damit der Ueberschuss des Druckes der Quecksilberröhre über den Druck der Luftröhre dem Druck einer Quecksilberröhre von 28″ das Gleichgewicht halte. Und sie setzt die Länge der Röhre DE=64, der Luftröhre = 4.

Aufgabe XXXII. (Fig. 30.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Grundlinie, Höhe und Schenkelsumme den gegebenen geraden Linien g, h, S, gleich seyen.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BAC das gesuchte Dreieck, so liegt, wenn BC als der Lage nach gegeben angenommen wird, die Spitze A auf der, in einer Entfernung = h mit BC parallel gezogenen, geraden Linie AG. Beschreibt man aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = AC, und verlängert BA bis zum Durchschnitte mit demselben in D, so ist

$$\left.\begin{matrix} BA + AD \\ BD \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = BA + AC \\ = S \end{matrix}$$

, also liegt D auf dem Umfange eines gegebenen, von dem Kreise, dessen Mittelgunkt in A ist, in D berührten Kreises. Legt man in den Kreis, dessen Mittelpunkt in A ist, die auf AG perpendikulare Sehne CF, so ist der Punkt F gegeben. Da nun dieser Kreis durch die gegebenen Punkte C, F lauft, und den anderen Kreis berührt, so lässt sich sein Mittelpunkt A finden. Mithin ist die Spitze A des gesuchten Dreieckes, somit das ganze Dreieck gegeben.

Construction.

Man mache BC = g, BCG = R, CG = h, GA ‡ BC, FG = GC, beschreibe durch F, C einen Kreis, welcher einen, aus B als Mittelpunkte mit einem Radius = S beschriebenen, Kreis berühre, und verbinde den auf der Linie AG liegenden Mittelpunkt desselben mit den Punkten B, C durch die geraden Linien BA, AC zusamen, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit durch F, C ein, den Kreis, dessen Mittelpunkt in B liegt, berührender, Kreis gelegt werden könne, darf, da der Punkt C innerhalb desselben liegt, der Punkt

F nicht ausserhalb desselben liegen, also muss

$FG \overset{=}{<} GH$ seyn, wenn H den Durchschnitt der Linie CF mit dem grossen Kreise bezeichnet;

folglich $FC \overset{=}{<} CH$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} FC^2+CB^2 \\ 4h^2+g^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} HC^2+CB^2 \\ BH^2 \\ S^2. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix} 4h^2+g^2 \\ FC^2+CB^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{<} \left\{\begin{matrix} S^2 \\ BH^2 \\ HC^2+CB^2 \end{matrix}\right.$$

demnach $FC \overset{=}{<} HC$;

mithin liegt F innerhalb des grossen Kreises. Es lässt sich also ein Kreis durch die Punkte F, C legen, welchen den grossen Kreis berührt. Da der Mittelpunkt desselben auf der geraden Linie BD und auf der, die Sehne FC perpendikular halbirenden, geraden Linie AG, also in A liegt, so ist $DA = AC$

folglich $BA+AC = BA+AD$
$= S.$

Da auch $BC = g$; $GC = h$ ist, so hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es, je nachdem $FG \overset{=}{<} GH$ ist, einen einzigen Kreis, oder zwey Kreise mit der Ei-

genschaft giebt, durch die Punkte F, C zu laufen, und den grossen Kreis zu berühren. dass man also auch ein Dreieck, oder zwey Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften erhält.

Algebraische Auflösung.

Setzt man BA=x, also AC=S—x, so ist $\frac{BA+AC+CB}{2}$ $=\frac{S+g}{2}$, $\frac{BA+AC-CB}{2}=\frac{S-g}{2}$, $\frac{CB+BA-AC}{2}=\frac{g+2x-S}{2}$, $\frac{AC+CB-BA}{2}=\frac{S+g-2x}{2}$,

$$\text{also } \left.\begin{array}{c}\triangle ABC \\ \frac{g.h}{2}\end{array}\right\} = \sqrt{\left(\frac{S+g}{2}\cdot\frac{S-g}{2}\cdot\frac{2x+g-S}{2}\cdot\frac{S+g-2x}{2}\right)}$$

$$\text{folglich } \frac{g^2h^2}{4}=\frac{S^2-g^2}{4}\cdot\frac{2x(S+g)-4x^2+g^2-S^2-2x(g-S)}{4}$$

$$\text{mithin } \frac{4g^2h^2}{S^2-g^2}=2x(S+g-g+S)-4x^2+g^2-S^2$$

$$\text{somit } 4x^2-4S.x = g^2-S^2-\frac{4g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$\text{demnach } x^2-Sx+\tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2+\frac{g^2-S^2}{4}-\frac{g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}g^2-\frac{g^2h^2}{S^2-g^2}$$

$$= g^2\left(\frac{\tfrac{1}{4}S^2-\tfrac{1}{4}g^2h^2}{S^2-g^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}g^2\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}S \pm \tfrac{1}{2}g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(S \pm g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)}\right)$$

Der Werth von x ist mithin ein doppelter, nämlich

$$x = \tfrac{1}{2}\left(S+g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)}\right)$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(S-g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)}\right).$$

Zusatz.

Da $S^2-g^2-4h^2 < S^2-g^2$, so ist

$$\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2} < 1$$

$$\text{folglich } \sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)} < 1$$

$$\text{somit } g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)} < g.$$

Nun ist $S > g$, also ist auch $S > g\sqrt{\left(\frac{S^2-g^2-4h^2}{S^2-g^2}\right)}$, mithin sind beide Werthe von x positiv. Da sie nichts anderes bezeichnen können, als die Linien BA, BA′, so unterscheidet also die Algebra zwischen den Linien BA, BA′ nicht durch die Zeichen + −, sondern sie versieht beide mit einerley Zeichen, und beide unterscheiden sich nur durch die absolute Grösse.

Zusatz 2.

Mit dem Vorstehenden stimmt das Resultat der Rechnung genau überein, wenn man BC in K halbirt, und KE = y setzt.

Alsdann ist $BA^2 = BE^2+EA^2$, $AC^2 = CE^2+EA^2$

$$= (\tfrac{1}{2}g+y)^2+h^2 \qquad = (\tfrac{1}{2}g-y)^2+h^2$$

also hat man die Gleichung

$$S = \sqrt{((\tfrac{1}{2}g+y)^2+h^2)}+\sqrt{((\tfrac{1}{2}g-y)^2+h^2)}$$

folglich $S-\sqrt{((\tfrac{1}{2}g-y)^2+h^2)} = \sqrt{((\tfrac{1}{2}g+y)^2+h^2)}$

mithin $S^2-2S\sqrt{((\tfrac{1}{2}g-y)^2)+h^2)}+(\tfrac{1}{2}g-y)^2=(\tfrac{1}{2}g+y)^2+h^2$

somit $-2S((\tfrac{1}{2}g-y)^2+h^2) = 2gy-S^2$

demnach $\left.\begin{matrix} 4S^2((\tfrac{1}{2}g-y)^2+h^2) \\ 4S^2(\tfrac{1}{4}g^2-gy+y^2+h^2) \end{matrix}\right\} = 4g^2y^2-4gyS^2+S^4$

also $\left.\begin{matrix} y^2(4S^2-4g^2) \\ 4y^2(S^2-g^2) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} S^4-S^2g^2-4S^2h^2 \\ S^2(S^2-g^2-4h^2) \end{matrix}\right.$

folglich $y^2 = \dfrac{S^2(S^2-g^2-4h^2)}{4(S^2-g^2)}$

mithin $y = \pm\dfrac{\tfrac{1}{2}S\sqrt{S^2-g^2-4h^2}}{S^2-g^2}.$

Durch welche Werthe nichts anderes, als die beiden einander gleichen, aber in entgegengesetzter Richtung liegenden, durch die, von den Spitzen, A′ auf die Grundlinie gefällten, Perpendikel bestimmten Segmente EK, E′K der Grundlinie, vom Halbirungspunkte an, bezeichnet seyn können, und wodurch also wiederum auf die Linien BA BA′ hingewiesen wird.

Aufgabe XXXIII. (Fig. 31.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen Hypotenuse und Flächenraum gegeben seyen, jene = der gegebenen geraden Linie S, dieser = dem Quadrate der gegebenen geraden Linie a.

Construction.

Man mache $BC = S$, $FC = a$, errichte in C auf BC ein Perpendikel, nehme $GC = CF$, ziehe FH ⵌ EG, HA ⵌ BC, und verknüpfe den Durchschnitt A der Linie HA und des über BC beschriebenen Halbkreises mit den Punkten B, C durch die geraden Linien BA, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Determination.

Damit HA dem Umfange begegne, muss

$$HC \overset{=}{<} \tfrac{1}{2} BC \text{ seyn,}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} FC:CH \\ EC:CG \\ \tfrac{1}{2}BC:a \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} FC \\ a \end{matrix}\right\} : \tfrac{1}{2} BC$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} \tfrac{1}{2}BC^2 \\ CK^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} a^2$$

, wenn CK den Punkt C mit dem Endpunkte des in E auf BC perpendikularen Halbmessers verbindet;

$$\text{mithin } KC \overset{=}{>} a.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } KC \overset{=}{>} a \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } HC \overset{=}{<} EK,$$

wie aus der Determination hervorgeht, folglich erreicht HA den Halbkreis in einem Punkte A.

Nun ist $EC:CG = FC:CH$

$$\left.\begin{array}{r}\text{also } EC.CH\\ \triangle ABC\end{array}\right\} = \begin{array}{l}CG^2\\ a^2.\end{array}$$

Zusatz.

Im Fall der Berührung des Kreises durch die Linie HA giebt es ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften, wie von selbst erhellet.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Höhe AD des Dreieckes mit y, so muss y so bestimmt werden, dass

$$\tfrac{1}{2}S.y = a^2$$

$$\text{also } y = \frac{a^2}{\tfrac{1}{2}S} \text{ werde.}$$

Zusatz.

Die Algebra giebt nur Einen Werth für die Höhe, weil beide Dreiecke, welche das Verlangte leisten, dieselbe Höhe AD = A'D' haben.

Bezeichnet man aber CA mit x, also BA mit $\frac{2a^2}{x}$,

$$\text{so ist } x^2 + \frac{4a^4}{x^2} = S^2$$

$$\text{folglich } x^4 + 4a^4 = S^2x^2$$

$$\text{mithin } x^4 - S^2x^2 + \tfrac{1}{4}S^4 = \tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4$$

$$\text{somit } x^2 = \tfrac{1}{2}S^2 \pm \surd(\tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4)$$

$$\text{demnach } x = \pm\surd(\tfrac{1}{2}S^2 \pm \surd\tfrac{1}{4}S^4 - 4a^4$$

Der Werth von x ist also ein vierfacher, welche, je zwey u. zwey einander gleich, mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind.

Es ist nämlich $x = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$

$$x = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$
$$x = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$
$$x = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$

Die Werthe von BA sind $= \dfrac{2a^2}{\pm\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}}$

$$= \pm \frac{2a^2 \sqrt{(\frac{1}{2}S^2 \mp \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}}{\sqrt{(4a^4)}}$$
$$= \pm \sqrt{(\frac{1}{2}S^2 \mp \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}.$$

Der Werth von BA ist also auch ein vierfacher, welche Werthe je zwey und zwey einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Es ist nämlich

$$BA = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$
$$BA = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$
$$BA = +\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})}$$
$$BA = -\sqrt{(\frac{1}{2}S^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)})},$$

welche Werthe den Werthen von x je zwey und zwey gleich sind.

Die geometrische Construction giebt an die Hand, dass die positiven Werthe von x die Linien CA, CA′, die correspondirenden negativen die Linien CA″, CA‴, und dass die positiven Werthe von BA die Linie BA, BA′, die correspondirenden negativen die Linien B″A″, B″A‴ bezeichnen. Bezeichnet man nämlich die, der Linie CB gleiche und entgegengesetzt liegende, Linie B″C durch (—S), und die Kathete CA″ des rechtwinkligen Dreieckes A″B″C von dem Flächenraume = a^2 durch x, so findet sich $x^2 = \frac{1}{2}(-S)^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(-S)^4 - 4a^4)}$

$$= \frac{1}{2}S^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}S^4 - 4a^4)}.$$

Derselbe Ausdruck involvirt also sowohl die Werthe von CA^2, als von CA'^2, und die Quadratwurzel aus demselben hat sowohl den Werth von CA, als den von CA′

anzugeben, welches die Algebra wegen der Entgegengesetztheit der Lage der Linien durch die Zeichen + — thut. Uebrigens unterscheidet die Algebra wiederum die von den Punkten B, B′ auf verschiedenen Seiten einander parallel laufenden Linien BA, BA″, oder BA′, B″A‴ durch die Zeichen + —.

Diese Nachweisung der Bedeutung der Zeichen erhält ihre Bestätigung durch den algebraischen Ausdruck der Höhe des Dreieckes für den Fall der negativ gesetzten Hypotenuse. Alsdann nämlich ist die Höhe

$$= \frac{a^2}{-\frac{1}{2}S}$$

$$= -\frac{a^2}{\frac{1}{2}S},$$ welches mit der in Beziehung auf DA entgegengesetzt liegenden Linie A″D′ übereinstimmt.

Aufgabe XXXIV. (Fig. 32.)

Ein Dreieck zu finden, in welchem die Grundlinie, Höhe und eine Seite den gegebenen geraden Linien g, h, b gleich seyen.

Construction.

Man nehme eine gerade Linie BC = g, errichte auf derselben das Perpendikel BG = h, lege GA′ ♯ BC, beschreibe aus C als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = b, welcher die Linie GA′ in A′ erreiche, und ziehe A′B, so ist A′BC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der Kreis die Linie A′G erreiche, muss

$$b \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} CK \\ h \end{cases} \text{seyn, (wenn } CKA' = R).$$

Beweis.

$$\text{Es ist } b \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} h \\ CK, \end{cases}$$

also berührt, oder schneidet der Kreis die Linie GA'. Geschieht es in A', so ist BC=g, A'H=BG=h, wenn A HB=R, CA' = b, also hat das Dreieck die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz.

Es erhellet von selbst, dass es im Fall der Berührung ein einziges, im Fall des Durchschnittes ein zweites Dreieck A″B C mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Berechnung.

Setzt man BA' = x, so ist
$$\begin{aligned} x^2 &= A'H^2 + HB^2 \\ &= h^2 + (g - CH)^2 \\ &= h^2 + (g - (\pm\sqrt{(b^2 - h^2)}))^2 \\ &= h^2 + g^2 \mp 2g\sqrt{(b^2 - h^2)} + b^2 - h^2 \\ &= g^2 + b^2 \mp 2g\sqrt{(b^2 - h^2)} \end{aligned}$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{(g^2 + b^2 \mp 2g\sqrt{(b^2 - h^2)})}.$$

Es hat mithin x vier je zwey und zwey einander gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehene Werthe, nämlich
$$\begin{aligned} x &= +\sqrt{(g^2 + b^2 - 2g\sqrt{(b^2 - h^2)})} \\ x &= +\sqrt{(g^2 + b^2 + 2g\sqrt{(b^2 - h^2)})} \\ x &= -\sqrt{(g^2 + b^2 - 2g\sqrt{(b^2 - h^2)})} \\ x &= -\sqrt{(g^2 + b^2 + 2g\sqrt{(b^2 - h^2)})}. \end{aligned}$$

Die positiven Werthe sind offenbar dieselbigen, welche die geometrische Construction gegeben hat, nämlich BA', BA″, die negativen diejenigen, welche die geometrische Construction gegeben haben würde, wenn man BC'=g, BG'=h

gemacht, und aus C' als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius = b bis zum Durchschnitte mit der Linie G'A'''(# BC) beschrieben hätte. Es ändern sich auch die Werthe von x nicht, wenn in derselben — g statt + g, —b statt +b, —h statt +h gesetzt wird. Weil aber die dazu gehörigen Werthe von x die Linien BA'''', BA''' bezeichnen müssen, so belegt sie die Algebra mit dem Zeichen —.

Aufgabe XXXV. (Fig. 33.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, in welchem die Hypotenuse BC der gegebenen geraden Linie g, die Differenz der Katheten der gegebenen geraden Linie d gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey BAC das gesuchte Dreieck, so ist

$$\left.\begin{array}{l} BC^2-(BA-AC)^2 : \triangle ABC \\ g^2 \quad - \quad d^2 \quad : \quad \frac{g \cdot h}{2} \end{array}\right\} = 4 : 1$$

(Euklids Data von Wurm, Satz 67. Zus.) wenn die Höhe AH = h gesetzt wird;

$$\text{also } \left.\begin{array}{l} g^2-d^2 \\ (g+d)(g-d) \end{array}\right\} = 2gh$$

folglich $2g : g+d = g-d : h$;
mithin ist h, somit das Dreieck gegeben.

Construction.

Man nehme BG = d, mache CB = C''B = g, richte in G auf GC ein Perpendikel GE auf, mache dasselbe = 2 G, beschreibe durch die Punkte C, C'', E einen das

Perpendikel GE in D schneidenden Kreis, lege durch D die Linie DA der Linie BC parallel, und beschreibe über BC einen die Linie AD in A erreichenden Halbkreis, so ist, wenn die geraden Linien BA, AC gezogen werden, ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\text{Es ist}\ \left.\begin{array}{r} g^2-d^2 \\ (g+d)(g-d) \\ CG.GC'' \\ \left.\begin{array}{r}EG\\ 2g\end{array}\right\}.GD \end{array}\right\} < \left\{\begin{array}{l} g^2 \\ 2g.\frac{1}{2}g\end{array}\right.$$

$$\text{also}\ GD < \tfrac{1}{2}g;$$

folglich erreicht die Linie DA den Kreis. Geschieht es in A, so ist

$$\left.\begin{array}{r}BC^2\\ g^2\end{array}\right\} - (BA - AC)^2 : \triangle ABC = 4:1$$

$$\text{mithin}\ g^2-(BA-AC)^2 : \left\{\begin{array}{l}2\triangle ABC\\ g.DG\end{array}\right\} \begin{array}{l}= 4:2\\ = 2:1\end{array}$$

$$= \left\{\begin{array}{l}2g.DG\\ EG.GD\\ CG.GC''\\ g^2-d^2\end{array}\right\} : g.DG$$

$$\text{somit}\ BA-AC = d.$$

Zusatz 1.

Für den zweiten Durchschnitt A' ist

$$\left.\begin{array}{r}BC^2\\ g^2\end{array}\right\} - (CA'-A'B)^2 : \left\{\begin{array}{l}2\triangle A'BC\\ g.DG\end{array}\right\} \begin{array}{l}= 2:1\\ = \left\{\begin{array}{l}2g.DG\\ g^2-d^2\end{array}\right\} : g.DG\end{array}$$

$$\text{folglich}\ CA'-A'B = d.$$

Zusatz 2.

Macht man auch $E'G = 2g$, und beschreibt einen Kreis durch die Punkte C, E', C'', welcher GE in D' schneide, legt die Linie D'A'' der Linie BC parallel, beschreibt über BC'' einen die Linie A''D in den Punkten A'', A''' erreichenden Kreis, und zieht die Linien BA'', C''A'', BA''', C'A''', so sind, wie von selbst erhellet, auch die Dreiecke, B A''C'', B A'''C'' von der gegebenen Eigenschaft.

Algebr. Auflösung.

Man halbire BC in O, fälle auf BC das Perpendikel AH, und setze $OH = y$, so ist

$$BH = \tfrac{1}{2}g + y, \qquad CH = \tfrac{1}{2}g - y$$

$$\text{also } BA^2 = g(\tfrac{1}{2}g + y), \qquad CA^2 = g(\tfrac{1}{2}g - y)$$

$$\text{folglich } BA = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g + y))}, \qquad CA = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} BA - AC \\ d \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g + y))} \mp \sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))}$$

$$\text{somit } \left.\begin{matrix} (d \pm \sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))})^2 \\ d^2 \pm 2d\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))} + \tfrac{1}{2}g^2 - gy \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} g(\tfrac{1}{2}g + y) \\ \tfrac{1}{2}g^2 + gy \end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach } \pm 2d\sqrt{(g(\tfrac{1}{2}g - y))} = 2gy - d^2$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} 4d^2(\tfrac{1}{2}g^2 - gy) \\ 2d^2g^2 - 4d^2y \end{matrix}\right\} = 4g^2y^2 - 4gd^2y + d^4$$

$$\text{folglich } \frac{(2g^2 - d^2)d^2}{4g^2} = y^2$$

$$\text{mithin } y = \pm\frac{d}{2g}\sqrt{(2g^2 - d^2)}.$$

Es hat also, in Uebereinstimmung mit der geometrischen Construction, y zwey einander gleiche, durch die

Zeichen + — sich unterscheidende Werthe, welche die Geometrie in entgegengesetzter Richtung construirt.

Bestimmt man aus y die Werthe von BA, CA, so ist

$$BA^2 = g(\tfrac{1}{2}g \pm \frac{d}{2g}\surd(2g^2-d^2)), \qquad CA^2 = g(\tfrac{1}{2}g \mp \frac{d}{2g}\surd(2g^2-d^2)).$$
$$= \tfrac{1}{2}g^2 \pm \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2) \qquad = \tfrac{1}{2}g^2 \mp \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2).$$

$$\text{also } BA = \pm\surd(\tfrac{1}{2}g^2 \pm \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2)),$$
$$CA = \pm\surd(\tfrac{1}{2}g^2 \mp \tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2)).$$

$$\text{oder } BA = \pm\frac{\surd(2g^2-d^2 \pm d)}{2}$$

$$CA = \pm\frac{\surd(2g^2-d^2 \mp d)}{2}.$$

Es haben also die Linien BA, CA vier Werthe,

$$\text{nämlich } BA = +\surd(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$BA = +\surd(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$BA = -\surd(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$BA = -\surd(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$

$$CA = +\surd(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$CA = +\surd(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$CA = -\surd(\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2))$$
$$CA = -\surd(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\surd(2g^2-d^2)).$$

$$\text{Oder } BA = +\frac{\surd(2g^2-d^2)+d}{2} \qquad CA = +\frac{\surd(2g^2-d^2)-d}{2}$$

$$BA = +\frac{\surd(2g^2-d^2)-d}{2} \qquad CA = +\frac{\surd(2g^2-d^2)+d}{2}$$

$$BA = -\frac{\surd(2g^2-d^2)+d)}{2} \qquad CA = -\frac{\surd(2g^2-d^2-d)}{2}$$

$$BA = -\frac{\surd(2g^2-d^2)-d}{2} \qquad CA = -\frac{\surd(2g^2-d^2+d)}{2}$$

Die positiven Werthe von BA, AC, wozu die ersten Paare gehören, beziehen sich offenbar auf die Linien BA, BA′, CA, CA′, die negativen auf die oben dargelegten Linien BA″, BA‴, C″A″, C″A‴. Es bestätigt sich also hier wieder, dass die Geometrie in entgegengesetzter Lage die Linien construirt, welche die Algebra durch die Zeichen + — unterscheidet, und dass eine Linie, wie C″A″, oder C″A‴ in Beziehung auf die ihr parallelen AC, oder A′C mit dem Zeichen — versehen wird.

Anmerkung 1.

Setzt man BA $= x$, AC $= y$, und $x - y = d$, $x^2 + y^2 = g^2$,

$$\text{also } x - d = y$$

$$\text{so ist } \left.\begin{matrix} x^2 + (x-d)^2 \\ 2x^2 - 2dx + d^2 \end{matrix}\right\} = g^2$$

$$\text{also } x^2 - dx = \frac{g^2 - d^2}{2}$$

$$\text{folglich } \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{g^2 - d^2}{2} + \tfrac{1}{4} d^2$$

$$= \frac{2g^2 - d^2}{4}$$

$$\text{mithin } x = \frac{d}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(2g^2 - d^2)}$$

$$= \frac{d \pm \sqrt{(2g^2 - d^2)}}{2}$$

$$\text{somit } y = \frac{-d \pm \sqrt{(2g^2 - d^2)}}{2}.$$

Man erhält also für x, y nur zwey Werthe, welche oben mit dem ersten und letzten von BA, CA übereinstimmen, und die Werthe von BA, BA‴ für x, von

CA und C″A‴ für y andeuten. Dass in diesem Falle nur zwey Werthe für x, y gefunden werden, rührt daher, dass die Aufgabe in einem beschränkteren Sinne gefasst wurde, als sie gegeben war, und die Geometrie sie behandelt. Bey der ersten Berechnungsart nämlich kann x sowohl kleiner, als grösser als y, also x—y sowohl $= +d$ als $= -d$ seyn, so wie in der geometrischen Fassung BA die grössere, oder die kleinere Kathete seyn kann, der Unterschied beider aber $= d$ bleibt. In der zweiten Rechnung wird x als das grössere bezeichnet; und dann zeigt die Algebra von den vier Werthen, welche für x möglich sind, nur den ersten und letzten an, wovon jener der grössere positive, dieser der kleinere negative, oder mit dem positiven verglichen, der grössere ist. Dadurch dass der zweite dieser Werthe von x negativ ist, zeigt die Algebra an, dass er einem der vier möglichen Werthe von x, welche die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit auflösen, entgegengesetzt liegt, wie BA‴ der Linie BA′ entgegengesetzt ist, nicht aber, dass sie gerade dem ersten dieser Werthe entgegengesetzt sey.

Anmerkung 2.

Bezeichnet man den Werth von BA durch x, von AC durch x—d, und setzt

$$\left.\begin{array}{r} x^2+(x-d)^2 \\ x^2+x^2-2dx+d^2 \end{array}\right\} = g^2$$

$$\text{so ist } x^2-dx = \frac{g^2-d^2}{2}$$

$$\text{also } x^2-dx+\tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{4}d^2$$

$$= \frac{2g^2-d^2}{4}$$

$$\text{folglich } x = \tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$

$$\text{mithin } x-d = -\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}.$$

Es könnte überraschen, dass also BA, AC nur zwey Werthe erhalten, wovon überdies der eine positiv, der andere negativ ist. Und man könnte versucht werden, dafür zu halten, dass der positive Werth von $\left\{\begin{matrix} x \\ x-d \end{matrix}\right\}$ die Linie $\left\{\begin{matrix} BA \\ CA \end{matrix}\right\}$, der negative die Linie $\left\{\begin{matrix} BA' \\ CA' \end{matrix}\right\}$ bezeichne. Aber man würde darin irren. Durch jene Gleichung $x^2+(x-d)^2 = g^2$ wird die Bedingung ausgedrückt, dass die von B auslaufende Linie des gesuchten rechtwinkligen Dreieckes um d grösser sey, als die andere, während durch die in Anmerkung 1. gegebene Anflösung die allgemeinere Aufgabe behandelt wird, ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben, in welchem der Unterschied der Katheten = d sey. Diese Aufgabe lässt die oben angegebenen vier Werthe für die Katheten zu, die beschränktere nur zwey, und die darin bezeichneten Werthe sind nicht BA, BA', und CA, CA', sondern BA, BA''', und CA, C''A'''. Es ist nämlich

$$+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} = +\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} = \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{4}d^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}+\left\{\begin{matrix}\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{4}d^2 \\ \tfrac{1}{4}(2g^2-d^2)\end{matrix}\right. \\ (\tfrac{1}{2}d \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)})^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2+\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})} = +\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}.$$

$$\text{Eben so ist } -\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)} = -\tfrac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d)}$$

also $\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}=\frac{1}{4}d^2-\frac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)}+\begin{cases}\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{4}d^2\\ \frac{1}{4}(2g^2-d^2)\end{cases}$

$$=(\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)})^2$$

folglich $-\sqrt{(\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{2}d\sqrt{(2g^2-d^2)})}=\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$.

Da nämlich links die negative Wurzel genommen wird, muss sie auch rechts genommen werden, und die ist $\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$.

Sollte die Aufgabe auf dem hier angegebenen Wege in der Allgemeinheit, wie in Anmerk. 1., aufgelöset werden, so müsste man setzen

$$x^2+(x\mp d)^2 = g^2$$

also $2x^2 \mp 2dx+d^2 = g^2$

folglich $x^2 \mp dx = \frac{g^2-d^2}{2}$

mithin $x^2 \mp dx+\frac{1}{4}d^2 = \frac{g^2}{2}-\frac{1}{4}d^2$

$$= \frac{2g^2-d^2}{4}$$

somit $x = \pm \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$.

Es würde demnach x vier Werthe erhalten,

$$x = +\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2g^2-d^2)},$$

welche mit den in Anmerkung 1. erhaltenen genau übereinstimmen.

Anmerkung 3.

Dieselbe Bewandtniss hat es mit der Aufgabe: ein

rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse und Kathetensumme gegeben seyen.

Aufgabe XXXVI. (Fig. 34.)

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse der gegebenen geraden Linie g, und Flächenraum der Hälfte des Quadrates der gegebenen geraden Linie f gleich sey.

Algebraische Auflösung.

Bezeichnet man die Katheten mit x, y, so muss seyn $xy = f^2$, $x^2+y^2 = g^2$

also $y = \frac{f^2}{x}$

folglich $x^2+\frac{f^4}{x^2} = g^2$

mithin $x^4+f^4 = g^2x^2$

somit $x^4-g^2x^2 = -f^4$

demnach $x^4-g^2x^2+\frac{1}{4}g^4 = \frac{1}{4}g^4-f^4$

also $x^2 = \frac{1}{2}g^2 \pm \sqrt{(\frac{1}{4}g^4-f^4)}$

folgl. $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}g^2+\sqrt{(\frac{1}{4}g^4-f^4)})}$, $y^2=g^2-\frac{1}{2}g^2\mp\sqrt{(\frac{1}{4}g^4-f^4)}$

mithin $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}g^2\mp\sqrt{(\frac{1}{4}g^4-f^4)})}$.

Zusatz 1.

Es ergeben sich also vier Werthe sowohl für x, als für y. Es ist nämlich

$$x = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)};$$

$$x = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$x = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$x = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$y = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$y = +\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = +\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$y = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}$$

$$y = -\sqrt{(\tfrac{1}{2}g^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^4 - f^4)})} = -\sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 + f^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{4}g^2 - f^2)}.$$

Zusatz 2.

Damit die Werthe von x, y reell werden, muss

$$\tfrac{1}{4}g^4 \geqq f^4$$

also $\tfrac{1}{2}g^2 \geqq f^2$,

folglich $g^2 \geqq 2f^2$ seyn.

Zusatz 3.

Von den Werthen von x und von y sind die beiden ersten positiv, die beiden letzten negativ. Die ersten Werthe von x, y sind den dritten, die zweiten Werthe den vierten derselben Grössen, dem absoluten Werthe nach, gleich. Der $\left\{\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\\ \text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ Werth von x ist dem $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\ \text{ersten}\\ \text{vierten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ von y gleich.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey △ABC das gesuchte, so ist

$$\left.\begin{matrix} BC.AD \\ g.AD \end{matrix}\right\} = f^2 \quad \left.\begin{matrix} AB.CD \\ g.CD \end{matrix}\right\} = f^2$$

also $g:f = f:CD$;

folglich ist CD der Grösse nach gegeben. Ist nun BC auch der Lage nach gegeben, so liegt der Punkt C auf einer, in gegebener Entfernung der geraden Linie AB parallel laufenden, Linie. Da er auch auf dem Umfange des über AB beschriebenen Halbkreises liegt, so ist er gegeben, somit △ABC gegeben.

Construction.

Von einer gegebenen, oder willkührlich angenommenen, geraden Linie schneide man $AB = g$ ab, beschreibe über AB einen Halbkreis, richte in A auf AB ein Perpendikel auf, beschreibe aus A als Mittelpunkte mit einem Radius $= f$ einen Kreis, welcher die Linie AB und jenes Perpendikel in H, K schneide; ziehe die gerade Linie BK, lege derselben die gerade Linie HE, welche dem Perpendikel in E begegne, parallel; ziehe durch den Punkt E die Linie EC parallel mit AB, und verbinde den Punkt C, in welchem die Linie EC dem Umfange jenes Halbkreises begegnet, mit den Punkten A, B durch die geraden Linien AC, CB, so ist △ABC das verlangte.

Determination.

Damit EC dem Umfange des Halbkreises begegne, muss $AE \overset{=}{<} \frac{1}{2} AB$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}HA:AE\\BA:AK\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} HA:2\,AB$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2}BA^2 \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix}HA.AK\\f^2\end{matrix}\right.$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix}BA^2\\g^2\end{matrix}\right\} \overset{=}{>} 2f^2 \text{ seyn.}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } g^2 \overset{=}{>} 2f^2$$

also $AE \overset{=}{>} \frac{1}{2}AB$, wie aus der Determination hervorgehet; mithin erreicht die Linie EC den Halbreis in einem Punkte C, und es ist $AB = g$, $ACB = R$, und $AB.CD = AB.CE$, wenn $CDA = R$,

$$= HA.AK$$
$$= f^2;$$

also hat $\triangle ABC$ die gegebenen Eigenschaften.

Zusatz 1.

Man erhält ein Dreieck, oder zwey Dreiecke mit den gegebenen Eigenschaften, je nachdem $g^2 \overset{=}{>} 2f^2$, also je nachdem die Linie EC den Halbkreis berührt, oder schneidet.

Zusatz 2.

Da AB auf der einen und auf der anderen Seite des Punktes $A = g$ genommen werden kann, so giebt es zwey, oder vier Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft.

Zusatz 3.

Die Linien AC′ und AC″, AC‴ und AC⁗ sind einander gleich und liegen in einer geraden Linie. Die Linien BC′ und BC″, BC‴ und BC⁗ sind einander gleich, und parallel.

Zusatz 4.

Die Algebra sieht das Quadrat von g als gegeben an, und nimmt also die gegebene Hypotenuse als positiv, oder negativ in Rechnung. Sie statuirt auch negative Werthe von x, y, weil nur die Quadrate dieser Werthe und ihr Produkt in den Gleichungen vorkommen, welche sich nicht änderen, wenn x und y negativ gesetzt werden, wie fern es nur von beiden zugleich geschieht.

Zusatz 5.

Die positiven Werthe von x deuten auf die Linien AC′, AC‴, die negativen auf AC″, AC⁗, die positiven Werthe von y auf BC′, BC‴, die negativen auf B′C″, B′C⁗ hin.

Zusatz 6.

Linien, welche, wie BC′, B′C″, oder wie BC‴, B′C⁗ einander gleich und parallel auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie liegen, werden durch die Zeichen + — unterschieden.

Zusatz 7.

Dreiecke, wie ABC′, AB′C″, welche einander congruent sind, und um zwey Verticalwinkel, wie BAC′, B′AC″ liegen, werden nicht durch die Zeichen ∓ = unterschieden.

Aufgabe XXXVII. (Fig. 35.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α, Umfang der gegebenen Linie S, und Flächenraum dem Quadrate der gegebenen Linie a gleich sey.

Analysis.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn auf der Verlängerung von BA die Linie AL = AC gemacht, die gerade Linie CL gezogen, und das Perpendikel AE auf dieselbe gefällt wird, (vermöge Eucl. Data von Wurm Satz 67.)

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} (BA+AC)^2 - BC^2 \\ (BA+AC+CB)(BA+AC-CB) \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} \triangle ABC \\ a^2 \end{matrix}\right\} \\ BA+AC-CB : \left\{\begin{matrix} \dfrac{a^2}{BA+AC+CB} \\ \dfrac{a^2}{S} \\ p \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\} = 4\,LE:EA$$

wenn $S:a = a:p$;

also ist BA+AC−CB gegeben. Da auch BA+AC+CB = S gegeben ist, so ist sowohl BA+AC, als BC gegeben, die Aufgabe also auf die Construction eines Dreieckes reducirt, dessen Grundlinie, Schenkelsumme und Winkel der Spitze gegeben sind.

Construction.

Man bestimme p durch die Proportion $S:a = a:p$, BA+AC-CB durch die Proportion AE:4LE = p:BA+AC-CB, leite daraus und aus dem Werthe von BA+AC-CB = S die Werthe von BA+AC, CB her, beschreibe über BC

einen Kreisabschnitt, welcher einen Winkel $= \alpha$ fasst, richte in dem Halbirungspunkte F von BC ein Perpendikel FG auf, welches den Umfang in G schneide, und beschreibe aus G als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $=$ GB, und aus B als Mittelpunkt einen anderen Kreis mit einem Radius $=$ BA $+$ AC, welcher den zuletzt beschriebenen Umfang in L erreiche, so ist, wenn die, den Kreisbogen BGC in A schneidende, gerade Linie BL gezogen, und der Punkt A mit dem Punkte C durch die gerade Linie BC verknüpft wird, ABC das gesuchte Dreieck.

Determination.

Damit der aus B als Mittelpunkte beschriebene Kreis den aus G als Mittelpunkte beschriebenen erreiche, muss BA $+$ AC $\overset{=}{<}$ BH seyn, wenn BH $= 2$ BG ist.

$$\text{Es ist } BA+AC-CB : \frac{a^2}{S} = 4\, LE : EA$$
$$= 4 : \tan. \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{also } BA+AC-CB = \frac{4a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha}.$$

$$\text{Auch ist } BA+AC+CB = S$$

$$\text{folglich } BA+AC = \tfrac{1}{2}S + \frac{2a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha},\quad BC = \tfrac{1}{2}S \quad \frac{2a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha + 2a^2}{S\tan.\frac{1}{2}\alpha},\quad = \frac{\frac{1}{2}S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha - 2a^2}{S\tan.\frac{1}{2}\alpha}$$
$$= \frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha + 4a^2}{2S\tan.\frac{1}{2}\alpha},\quad = \frac{S\tan.\frac{1}{2}\alpha - 4a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha}.$$

$$\text{Ferner ist } \left.\begin{matrix} CB \\ \frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha - 4a^2}{S.\tan.\frac{1}{2}\alpha} \end{matrix}\right\} : BH = \sin.\tfrac{1}{2}\alpha : 1$$

$$\text{mithin BH} = \frac{S^2 \tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2}{S\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha};$$

demnach muss seyn

$$\frac{S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha + 4a^2}{2S\tan.\tfrac{1}{2}\alpha} \overset{=}{<} \frac{S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2}{2S.\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{somit } S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha + 4a^2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha \overset{=}{<} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha - 4a^2$$

$$\text{also } 4a^2(1+\sin.\tfrac{1}{2}\alpha) \overset{=}{<} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha(1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\text{folglich } 4a^2 : S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha \overset{=}{<} 1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha : (1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\text{mithin } 4a^2 : S^2 = \tan.\tfrac{1}{2}\alpha : \begin{cases} \dfrac{1+\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}{1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha} \\ (\tan.(45^0+\tfrac{1}{4}\alpha))^2. \end{cases}$$

Der Beweis ergiebt sich von selbst.

Zusatz.

Auch erhellet leicht, dass es im Fall der Berührung der Kreise, welche B und G zu Mittelpunkten haben, ein einziges, im Fall des Durchschneidens ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften giebt.

Anmerkung 1.

Um den Winkel ABC = B zu berechnen, hat man

$$\begin{aligned} CB:BL &= \sin.BLC:\sin.BCL \\ &= \sin.\tfrac{1}{2}\alpha:\sin.(\tfrac{1}{2}\alpha+B) \\ &= \sin.\tfrac{1}{2}\alpha:\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.B+\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \\ &= 1:\cos.B+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \\ &= 1:\sqrt{(1-\overline{\sin B}^2)}+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B \end{aligned}$$

also $\sqrt{(1-\overline{\sin.B}^2)}+\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B=\frac{BL}{BC}$

folglich $\sqrt{(1-\overline{\sin.B}^2)}=\frac{BL}{BC}-\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$

mithin $1-\overline{\sin.B}^2=\frac{BL^2}{BC^2}-2\frac{BL}{BC}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B+\overline{\cot.\tfrac{1}{2}\alpha}^2.\overline{\sin.B}^2$

somit $1-\frac{BL^2}{BC^2}=\left\{\begin{matrix}\overline{\sin.B}^2(1+\overline{\cot.\tfrac{1}{2}\alpha}^2)\\ \overline{\sin.B}^2.\overline{\mathrm{cosec}.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\\ \frac{(\sin.B)^2}{(\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)^2}\end{matrix}\right\}-2\frac{BL}{BC}\cot.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$

demnach

$\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2=\overline{\sin.B}^2-2\frac{BL}{BC}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\sin.B$

also

$$\left.\begin{matrix}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2+\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2.\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\\ \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}+\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)\\ \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\left(1-\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)\right)\\ \overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)\end{matrix}\right\}=\left(\sin.B-\frac{BL}{BC}.\sin.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2$$

folglich

$$\sin.B=\frac{BL}{BC}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)}$$

$$=\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{BL}{BC}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{\left(1-\frac{BL^2}{BC^2}\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2\right)}\right)$$

$$=\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2}\right)$$

Die Möglichkeit der Auflösung hangt davon ab, dass

$$1 \overset{=}{>} \frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha$$

mithin $1:\sin.\tfrac{1}{2}\alpha \overset{=}{>} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha+4a^2:S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha-4a^2$

somit $1+\sin.\tfrac{1}{2}\alpha:1-\sin.\tfrac{1}{2}\alpha \overset{=}{<} S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha:4a^2$,

welches mit der oben gefundenen Determination übereinstimmt.

Da auch $S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha+4a^2 > S^2\tan.\tfrac{1}{2}\alpha-4a^2$

so ist $\dfrac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2} > 1$

also $\left(\dfrac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\right)^2(\overline{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha}^2+\overline{\sin.\tfrac{1}{2}\alpha}^2) > 1$

folglich

$$\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 > 1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2$$

mithin

$$\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha > \sqrt{\left(1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}$$

somit

$$\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha+4a^2}{S^2\tan.\frac{1}{2}\alpha-4a^2}\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2} > 0$$

demnach $\sin.B > 0$.

Die Werthe von sin. B sind also beide positiv; und es werden ohne Zweifel dadurch zunächst die spitzen Winkel ABC, A'BC angedeutet.

Uebrigens erhellet daraus, wie wichtig es ist, bey solchen Rechnungen nicht den einen Werth der gesuchten Grösse ausser Acht zu lassen.

Anmerkung 2.

Bekanntlich aber gehören zu jedem Sinus zwey Winkel, welche einander zu 2R ergänzen. Es liegen also in den beiden Werthen von sin. B eigentlich die Andeutungen von vier Winkeln, nämlich von den genannten spitzen Winkeln ABC, A'BC, und von ihren Supplementen KBC, MBC, wodurch zwey den Dreiecken ABC, A'BC congruente Dreiecke A''BC, A'''BC angedeutet werden, welche man geometrisch auch findet, wenn die Construction in der gehörigen Allgemeinheit gefasst, und sowohl auf der einen, als der anderen Seite von BC Kreisabschnitte beschrieben werden, welche des Winkels α fähig sind.

Aufgabe XXXVIII. (Fig. 36.)

Ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten den gegebenen geraden Linien a, b, c gleich sind, wovon je zwey zusammen genommen grösser sind, als die dritte.

Auflösung.

Man beschreibe aus den Endpunkten B, C der Linie AB, welche der einen, z. E. der Linie a, gleich sey, Kreise mit Radien, welche den Linien b, c gleich sind, und verbinde den Durchschnittspunkt A derselben mit

den Punkten B, C. durch die geraden Linien AB, AC, so ist, wie von selbst erhellet, ABC das gesuchte Dreieck.

Zusatz.

Da die Kreise einander zweimal schneiden, so giebt es ein zweites Dreieck A'BC mit den gegebenen Eigenschaften.

Anmerkung 1.

Drückt man den Inhalt des Dreieckes aus den Seiten a, b, c durch Rechnung aus, so ist, wenn $a+b+c = S$ gesetzt wird, $\triangle ABC = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(\frac{1}{2}S-c))}$. Da der doppelte Werth des Flächeninhaltes nichts anderes, als die, auf geometrischem Wege gefundenen, Dreiecke ABC, A'BC andeuten kann, so bezeichnet also die Algebra von zwey einander gleichen, in der Art, wie $\triangle ABC$, und $\triangle A'BC$, entgegengesetzt liegenden Dreiecken das eine durch $-$, wenn das andere durch $+$ bezeichnet wird.

Dasselbe stimmt mit dem überein, was die Berechnung der Höhe an die Hand giebt. Es ist nämlich die Höhe des Dreieckes, dessen Seiten durch a, b, c bezeichnet werden, $= \pm\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-a)(\frac{1}{2}S-b)(1/2\,S-c))}}{1/2\,a}$, welcher doppelte Werth nur die Höhen AD, A'D bezeichnen kann, und ein Dreieck, welches durch das negative Zeichen von dem Dreieck ABC unterschieden wird, erscheint in Beziehung auf dieses in einer Lage, wie das Dreieck A'BC.

Anmerkung 2.

Es ist der Ausdruck für $\sin. ACB = \pm\frac{2}{ab}\triangle ABC$. Da durch den doppelten Werth desselben nichts anderes

angedeutet werden kann, als die Winkel ACB, A'CB, so unterscheidet also die Algebra die Sinus der gleichen Winkel, welche eine entgegengesetzte Lage haben, wie ACB, A'CB, durch die Zeichen + —.

Was die stumpfen Winkel betrifft, welchen dieselben Sinus, wie den spitzen Winkeln zukommen, so sind sie ohne Zweifel die Winkel BCE, BCE', welche die Winkel BCA, BCA' zu 2 R ergänzen, und welche zu zwey anderen Dreiecken BCE, BCE' führen, deren an BC liegende Seiten CE, CE' gleich b genommen werden. Da nämlich

$$\left.\begin{matrix} BCE \\ 2R - MCE \end{matrix}\right\} = 2R - BCA,$$

so ist MCE = BCA, also das Perpendikel EM = AD,

$$\text{mithin } \triangle BCE = \triangle BCA$$

$$\text{also auch } \sin. BCE = \frac{2}{ab} \triangle ABC.$$

Es ist also $\frac{2}{ab} \triangle ABC$ sowohl der Sinus des Winkels BCE, als des Winkels BCA. Und das deutet die Rechnung dadurch an, dass sie zwey einander zu 2 R ergänzende Winkel als diejenigen anweiset, welche demselben Sinus zugehören. Eben so ist es mit sin. BCE'. Die Algebra antwortet mithin, durch den Ausdruck $\sin. ABC = \pm \frac{2}{ab} \triangle ABC$ in erschöpfender Allgemeinheit auf die Frage, wie gross der Sinus des von zwey, der Grösse nach gegebenen, Seiten eines Dreieckes, dessen Inhalt gegeben ist, eingeschlossenen, der dritten Seite gegenüberliegenden Winkels sey, und sie weiset durch das doppelte Zeichen, und die Doppelheit der Winkel, welche demselben Sinus zugehören, die vier Winkel BCA,

BCA', BCE, BCE', welche durch die gegebenen Seiten a, b, c bestimmt werden, und die vier Dreiecke ABC, A'BC, ECB, E'CB an.

Anmerkung 3.

Eine Bestätigung davon liegt in dem Ausdrucke für die Hälfte des Winkels, dessen Sinus $= \pm \frac{2}{ab} \triangle ABC$ ist. Für irgend einen Winkel C ist nämlich

$$\sin.C = 2.\sin.\tfrac{1}{2}C.\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{also } \frac{\sin.C}{2\cos.\frac{1}{2}C} = \sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{mithin } \sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.C}{\pm 2\sqrt{(1-\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2)}}$$

$$\text{somit } \left.\begin{array}{l} 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2(1-\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^4)) \\ 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^2 - 4\overline{\sin.\frac{1}{2}C}^4 \end{array}\right\} = \overline{\sin.C}^2$$

$$\text{demnach } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^4 - \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 = -\tfrac{1}{4}\overline{\sin.C}^2$$

$$\text{also } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^4 - \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 + \tfrac{1}{4} = \frac{1-\overline{\sin.C}^2}{4} = \frac{\overline{\cos.C}^2}{4}$$

$$\text{folglich } \overline{\sin.\tfrac{1}{2}C}^2 = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\cos.C = \frac{1 \pm \cos.C}{2}$$

$$\text{mithin } \sin.\tfrac{1}{2}C = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \cos.C}{2}}.$$

Es hat demnach $\sin.\frac{1}{2}ACB$ folgende vier Werthe:

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1+\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = -\sqrt{\frac{1+\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{1-\cos.C}{2}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = -\sqrt{\frac{1-\cos.C}{2}}.$$

Da die analytische Trigonometrie lehrt, dass $\sin.\tfrac{1}{2}ACB = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.ACB}{2}}$, so sind die beiden letzteren jener Werthe die Sinus von den Winkeln ACB, A'CB. Und da $\sin.\tfrac{1}{2}ECB = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.ECB}{2}}$, aber $\cos.ECB = -\cos.ACB$, so ist $\sin.\tfrac{1}{2}ECB = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.ACB}{2}}$, mithin deuten die beiden ersteren jener Werthe die Sinus der Winkel ECB, E'CB an.

Aufgabe XXXIX. (Fig. 37.)

Durch den innerhalb des gegebenen Winkels ABC gegebenen Punkt D eine gerade Linie zwischen die Schenkel AB, BC zu legen, welche ein Dreieck ABC von ausgezeichnetem Werthe bestimme.

Auflösung.

Es sey ABC das gesuchte Dreieck, so ist, wenn DG der AB parallel gezogen ist, und die Perpendikel AF, DE auf BC gefällt werden,

$$\left.\begin{matrix} BC:CG \\ x:x-a \end{matrix}\right\} = AC:CD$$ wenn $BC = x$, $BG = a$ gesetzt wird;

$$= AF:\left\{\begin{matrix} DE \\ b \end{matrix}\right\}$$ wenn man $DE = b$ setzt;

$$= \left\{\begin{matrix} AF.BC \\ 2y \end{matrix}\right\}:b.x$$, wenn man $\triangle ABC = y$ setzt;

$$= y : \frac{bx}{2}$$

$$\text{also } y = \frac{\frac{1}{2}bx^2}{x-a}$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)bx - \frac{1}{2}bx^2}{(x-a)^2}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} bx(x-a) - \frac{1}{2}bx^2 \\ bx(x-a-\frac{1}{2}x) \\ bx(\frac{1}{2}x-a) \end{matrix}\right\} = 0$$

demnach $x = 0$, oder $\frac{1}{2}x - a = 0$

somit $x = 2a$.

$$\text{Für } x = 0 \text{ ist } y = -\frac{0}{a}$$

$$= -0.$$

$$\text{Für } x = 2a \text{ ist } y = \frac{2ba^2}{a}$$

$$= 2ab.$$

$$\text{Ferner ist } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}bx^2 - abx}{(x-a)^2}$$

$$\text{also } \frac{d^2.y}{(dx)^2} = \frac{(x-a)^2(bx-ab)-(\frac{1}{2}bx^2-abx)2(x-a)}{(x-a)^4}$$

$$= \frac{b(x-a)^2-2(\frac{1}{2}bx^2-abx)}{(x-a)^3}$$

$$= \frac{ba^2}{(x-a)^3}$$

$$\text{folglich } \frac{d^2.y}{(dx)^2} = \frac{ba^2}{-a^3} = -\frac{b}{a} \text{ für } x = 0;$$

$$= \frac{ba^2}{a^3} = +\frac{b}{a} \text{ für } x = 2a.$$

Es ist mithin der Werth von y ein $\left\{\begin{matrix}\text{grösster}\\ \text{kleinster}\end{matrix}\right\}$ für $x = \left\{\begin{matrix}0\\ 2a\end{matrix}\right\}$.

Die Bedeutung des letzteren ist für sich klar. Was den ersteren betrifft, so ist, wenn man

$x = +0,1.a$, oder $x = -0,1.a$ setzt,

$$y = \frac{\frac{1}{2}b.0,01.a^2}{0,1.a-a}, \qquad y = \frac{\frac{1}{2}b.0,01.a^2}{-\frac{11}{10}.a}$$

$$= -\frac{0,01.ab}{\frac{18}{10}} \qquad = -\frac{0,01.ab}{\frac{22}{10}}$$

$$= -\tfrac{1}{180}ab \qquad = -\tfrac{1}{220}ab.$$

Es ist also y wirklich ein grösstes, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

Zusatz 1.

Hieraus erhellet wieder, dass man nicht einen Werth der Wurzel einer Gleichung als bedeutungslos wegzuwerfen hat.

Zusatz 2.

Ein Dreieck A'BC', welches in dem Nebenwinkel des Winkels ABC liegt, heisst in Beziehung auf das Dreieck ABC ein negatives.

Aufgabe XL. (Fig. 38.)

Die dritte Seite AC eines Dreieckes ABC aus den beiden übrigen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel auszudrücken.

Auflösung.

Es ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos ABC$

also $AC = \pm \sqrt{(AB^2 + BC^2 - AB.BC.\cos.ABC)}$

Zusatz.

Es hat die dritte Seite zwey gleiche, durch die Zeichen $+ -$ von einander unterschiedene, Werthe. Nimmt man auf den Verlängerungen von CB, AB über B hinaus die Linien C'B, A'B den Linien CB, AB gleich, welche Linien in Beziehung auf BC, BA durch $-BC$, $-BA$ ausgedrückt werden, und zieht man A'C', so ist

$$A'C'^2 = A'B^2 + BC'^2 - 2\,A'B.BC'.\cos.A'CB$$
$$= (-AB)^2 + (-BC)^2 - 2(-AB)(-BC)\cos.A'CB$$
$$= AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos.ACB,$$

also ist $AB^2 + BC^2 - 2\,AB.BC.\cos.ACB$ sowohl dem Quadrate von AC, als dem Quadrate von A'C' gleich, und die Quadratwurzel jenes Ausdruckes sowohl die Bezeichnung für AC, als für A'C', und die Verschiedenheit der Zeichen deutet die Verschiedenheit der Lage dieser Linien an.

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} U^2 - 4hU + 4h^2 \\ (U - 2h)^2 \end{matrix}\right\} \geqq 8h^2$$

$$\text{somit } U - 2h \geqq 2h\sqrt{2}$$

$$\text{demnach } U \geqq 2h(\sqrt{2} + 1)$$

$$\geqq 2h(2{,}414)$$

$$\geqq 4{,}828.h.$$

Wäre also $U < 4{,}828.h$, so hört zwar die Hypotenuse nicht auf, einen reellen Werth zu haben, aber die Katheten werden imaginär, und das Dreieck kann nicht construirt werden.

Aufgabe XLVIII. (Fig. 43. a. b.)

Durch einen gegebenen Winkelpunkt A eines gegebenen Quadrates ABCD eine gerade Linie zwischen die Schenkel des gegenüberliegenden Winkels zu legen, welche der gegebenen geraden Linie b gleich sey.

Geometrische Behandlung.

Analysis.

Es sey E'F' die gesuchte Linie, so ist, wenn über F'E', als Durchmessern, ein Kreis beschrieben wird, welcher durch C lauft, und die Verlängerung der Diagonale CA in R schneide, RF'A = RCE', wenn die gerade Linie RF' gezogen worden ist;

$= RCF'$

---

also $CR:RF' = F'R:RA$

---

folglich $CR.RA = RF'^2$.

Da Bogen $E'R$ = Bogen RF', so ist RF' die Chorde eines Quadranten in dem Kreise, dessen Diameter $E'F' = b$ ist, ist also gegeben; mithin lässt sich der Punkt R, und mit ihm der Punkt F' finden.

Construction.

Man mache $AN = b$, beschreibe über AN einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkte M desselben auf AN einen perpendikularen Radius, ziehe die gerade Linie AO, errichte in A auf AC ein Perpendikel $AP = AO$, halbire AC in Q, ziehe die gerade Linie OP, beschreibe aus Q, als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem Radius = QP, welcher der verlängerten CA in R begegne, lege durch P, R die Linien PS, RS den Linien AR, AP parallel, beschreibe aus R, als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem Radius = RS, welcher der verlängerten CB in F' begegne, und ziehe durch A die, die verlängerte Linie CD in E' schneidende, gerade Linie F'E', so ist E'F' die gesuchte Linie.

Determination.

Damit der Kreis, welcher in R seinen Mittelpunkt hat, die Linie CB erreiche, muss, wenn das Perpendikel RU auf CB gefällt wird,

$RS \overline{\geq} RU$ seyn,

$$\text{also } \left.\begin{matrix} RS^2 \\ AP^2 \\ AO^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{matrix}\right\} \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} RU^2 \\ \frac{1}{2}CR^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{folglich } b^2 \overset{=}{>} CR^2$$

$$\text{mithin } b \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} CR \\ RQ+QC \end{matrix}\right.$$

$$\text{somit } b^2-2b.QC+QC^2 \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} RQ^2 \\ QP^2 \\ PA^2+QA^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{demnach } b^2-b\,.\,AC \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} PA^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{also } b-AC \overset{=}{>} \tfrac{1}{2}b$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2}b \overset{=}{>} AC$$

$$\text{mithin } b \overset{=}{>} \left\{\begin{matrix} 2AC \\ VX, \end{matrix}\right. \text{ wenn } CAV = CAX = R \text{ ist.}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } b \overset{=}{>} VX \text{ (Det.)}$$

$$\text{somit } RS \overset{=}{>} RU,$$ wie aus der Determination erhellet;

mithin erreicht der Kreis die Linie CB in einem Punkte F, so dass $RF^2 = CR.RA$

mithin $CR:RF' = F'R:RA$

demnach $RF'A = RCF'$
$= RCE'$; also liegen die Punkte R, E', C, F' auf dem Umfange eines Kreises, welcher über EF', als Durchmessern, beschrieben wird, und es ist arc.$E'R$ = arc.RF', also RF' die Chorde eines Quadranten. Da $RF' = AO$, und AO die Chorde des über $AN = b$ beschriebenen Halbkreises ist, so ist $E'F' = b$.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, dass es, wenn der Kreis, welcher R zum Mittelpunkte hat, die Linie CB berührt, eine einzige, wenn er sie schneidet, eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

Nimmt man auch den Durchschnitt R' des Kreises, welcher Q zum Mittelpunkte hat, mit der verlängerten CA, verlängert SP bis zum Durchschnitte mit dem, in R' auf CR' errichteten, Perpendikel $R'S'$, und beschreibt einen Kreis aus R', als Mittelpunkte, mit einem Radius $= R'S'$, so schneidet derselbe die Linie BC in F, CD in L,

weil $\frac{1}{2}b + AC > 0$

also $\frac{1}{2}b^2 + 2b.QC > 0$

folglich $b^2 + 2b.QC > \begin{cases}\frac{1}{2}b^2 \\ PA^2\end{cases}$

mithin $b^2 + 2b.QC + CQ^2 > \begin{cases}PA^2 + AQ^2 \\ QP^2 \\ RQ^2\end{cases}$

somit $b + QC > RQ$

$$\text{demnach } b > \begin{cases} RQ - QC \\ CR \end{cases}$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix} \tfrac{1}{2} b \\ AO^2 \\ AP^2 \\ RS^2 \end{matrix}\right\} > \begin{cases} \tfrac{1}{2} CR^2 \\ RU^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } SR > RU;$$

und nun ist, wenn die geraden Linien AF, AL gezogen werden, welche die Verlängerung von DC, BC in E, H schneiden, $CR' : R'F = FR' : R'A$

$$\text{also } AFR' = FCR'$$
$$= ACE$$

$$\text{folglich } CR'F = CEF;$$

demnach liegen F, C, R', E auf dem Umfange des Kreises, welcher FE zum Diameter hat, so dass

$$R'FE = 2R - \begin{cases} AFR' \\ FCR' \end{cases}$$
$$= FER'$$

$$\text{mithin arc.}ER' = \text{arc.}FR';$$

$$\text{also ist } \left.\begin{matrix} FR' \\ R'S' \\ AO \end{matrix}\right\} \text{ die Chorde eines Quadranten AO des über}$$

FE beschriebenen Kreises, somit $FE = AN$
$= b.$

Eben so ist $CR' : R'L = LR' : R'A$

$$\text{also } ALR' = LCR'$$
$$= ACH$$

folglich $CR'L = LHC$

demnach liegen H, L, C, R' auf einem Kreisumfange, welcher LH zum Durchmesser hat, so dass

$$HLR' = 2R - \begin{cases} ALR' \\ LCR' \end{cases}$$
$$= LHR'$$

also $arc.HR' = arc.R'L$

folglich ist LR' die Chorde eines Quadranten AO des, über HL beschriebenen, Kreises, somit $HL = AN$
$= b.$

Zusatz 3.

Beschreibt man über der Linie $B'A = AB$, welche auf der Verlängerung von BA über A hinaus genommen ist, auf der anderen Seite von BB', als da, wo ABCD liegt, ein Quadrat AB'C'D', so lösen die Linien AE, AL AE', AL' obige Aufgabe zugleich in Beziehung auf das Quadrat von AB' auf, und bestimmen namentlich die Linien F''E'', H''L'', F'''E''', H'''L''' zwischen den Schenkeln des, dem Winkel B'AD' gegenüberliegenden, Winkels von einer Länge = b.

Algebraische Auflösung.

Setzt man zur algebraischen Bestimmung die Linie

$$BF = x, \quad BA = a$$

so ist $CF = a - x$, $AF^2 = a^2 + x^2$,

Nun ist $AF^2 : FB^2 = EF^2 : FC^2$

$$\text{also } a^2 + x^2 : x^2 = b^2 : \begin{cases} (a-x)^2 \\ a^2 - 2ax + x^2 \end{cases}$$

folglich $b^2x^2 = a^4+a^2x^2-2a^3x-2ax^3+a^2x^2+x^4$

mithin $x^4-2ax^3-(b^2-2a^2)x^2-2a^3x+a^4 = 0$

d. i. $(x^2+(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)x+a^2)(x^2-(\sqrt{(a^2+b^2)}+a)x+a^2) = 0$

demnach entweder $x^2+(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)x+a^2 = 0$

oder $x^2-(\sqrt{(a^2+b^2)}+a)x+a^2 = 0$

$$\text{also entw.}\left(x+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}\right)^2-a^2$$

$$= \frac{a^2+b^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2-4a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)}}{4}$$

$$\text{folglich } x = -\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2} \pm \frac{\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

$$= \frac{a-\sqrt{(a^2+b^2)} \pm \sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$\text{oder } \left(x-\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}{2}\right)-a^2$$

$$= \frac{a^2+b^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2-4a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)}}{4}$$

$$\text{folglich } x = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}+a \pm \sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

Die vier Werthe von x sind also

$$x' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)}+a+\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)}+a-\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}+a+\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}+a-\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

Da $(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)^2 > \begin{cases}(\sqrt{(a^2+b^2)}-a)^2-4a^2\\ b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)}\end{cases}$

so ist $\sqrt{(a^2+b^2)}-a > \sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}$

folglich $\sqrt{(a^2+b^2)} > a+\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}$;

mithin ist der erste, und noch viel mehr der zweite jener Werthe von x negativ, dagegen sind die beiden letzteren positiv, übereinstimmend mit der geometrischen Construction, welche BH', BF' in die, den Linien BH, BF entgegengesetzte, Lage bringt. Es ist also

$$x' = BH'$$
$$x'' = BF'$$
$$x''' = BH$$
$$x'''' = BF.$$

Uebrigens sind die beiden ersten Werthe nur möglich, wenn

$$b^2 \geqq 2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)}$$

also $b^2-2a^2 \geqq 2a\sqrt{(a^2+b^2)}$

folglich $b^4-4a^2b^2+4a^4 \geqq 4a^4+4a^2b^2$

mithin $b^4 \geqq 8a^2b^2$

somit $b^2 \geqq 8a^2.$

Macht man CAT = CAU = R, so ist

$$TU^2 = TC^2 + UC^2$$
$$= 2\,TC^2 = 2.4\,CD^2$$
$$= 8.CD^2$$
$$= 8.a^2$$

also muss $b \genfrac{}{}{0pt}{}{=}{>} TU$ seyn.

Anmerkung 1.

Verwandelt man, um diese Werthe von x in diejenigen umzuändern, welche dem Quadrate A B′C′D′ angehören, den Werth von a in—a, so wird

$$x' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)}-a+\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'' = \frac{-\sqrt{(a^2+b^2)}-a-\sqrt{(b^2-2a^2+2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}-a+\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}$$

$$x'''' = \frac{+\sqrt{(a^2+b^2)}-a-\sqrt{(b^2-2a^2-2a\sqrt{(a^2+b^2)})}}{2}.$$

Der {erste / zweite / dritte / vierte} dieser Werthe ist der entgegengesetzte des {vierten / dritten / zweiten / ersten} der obigen, und ihm, absolut genommen, gleich.

Die Construction stellt sie in der Ordnung dar durch B′F″, B′H″, B′F‴, B′H‴.

Anmerkung 2.

Es ist AF:FB = EF:FC. Setzt man AF $= y$, so ist $y:\sqrt{(y^2-a^2)} = b:a-\sqrt{(y^2-a^2)}$

also $ay - y\sqrt{(y^2-a^2)} = b\sqrt{(y^2-a^2)}$

folglich $ay = (b+y)\sqrt{(y^2-a^2)}$

mithin $a^2y^2 = (b^2+2by+y^2)(y^2-a^2)$

$= b^2y^2+2by^3+y^4-a^2b^2-2a^2by-a^2y^2$

somit $a^2b^2 = y^4+2by^3+(b^2-2a^2)y^2-2a^2by$

demnach $a^4+a^2b^2 = y^4+2by^3+(b^2-2a^2)y^2-2a^2by+a^4$

$= (y^2+by-a^2)^2$

also $\pm\sqrt{(a^4+a^2b^2)} = y^2+by-a^2$

folglich $a^2+\frac{1}{4}b^2\pm\sqrt{(a^4+a^2b^2)} = (y+\frac{1}{2}b)^2$

demnach $y = -\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2\pm\sqrt{(a^4+a^2b^2)})}$.

Die vier Werthe von y sind also folgende:

$$y' = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$$
$$y'' = -\tfrac{1}{2}b-\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$$
$$y''' = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}$$
$$y'''' = -\tfrac{1}{2}b-\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}.$$

Um zu erkennen, welche Linien durch diese Werthe angedeutet sind, setze man $AO = z$, wenn O der Halbirungspunkt von FE ist, also $AE = z+\frac{1}{2}b$, $AF = z-\frac{1}{2}b$.

Da nun $AE^2:ED^2 = FA^2:AB^2$,

so ist $(z+\frac{1}{2}b)^2:(z+\frac{1}{2}b)^2-a^2 = (z-\frac{1}{2}b)^2:a^2$

$$\text{also } a^2(z+\tfrac{1}{2}b)^2 = (z+\tfrac{1}{2}b)^2(z-\tfrac{1}{2}b)^2 - a^2(z-\tfrac{1}{2}b)^2$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{folglich } a^2((z+\tfrac{1}{2}b)^2+(z-\tfrac{1}{2}b)^2)\\ a^2(2z^2+\tfrac{1}{2}b^2)\\ 2a^2z^2+\tfrac{1}{2}a^2b^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}=(z^2-\tfrac{1}{4}b^2)^2\\ = z^4-\tfrac{1}{2}b^2z^2+\tfrac{1}{16}b^4\\ \end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{mithin } \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4 &= z^4-(\tfrac{1}{2}b^2+2a^2)z^2\\ &= z^4-2(\tfrac{1}{4}b^2+a^2)z^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{somit } \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4+(a^2+\tfrac{1}{4}b^2)^2\\ \tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{16}b^4+a^4+\tfrac{1}{2}a^2b^2+\tfrac{1}{16}b^4\\ a^4+a^2b^2\\ a^2(a^2+b^2)\end{array}\right\}= (z^2-(\tfrac{1}{4}b^2+a^2))^2$$

$$\text{demnach } z^2-(\tfrac{1}{4}b^2+a^2) = \pm a\sqrt{(a\ +b^2)})$$

$$\text{also } z = \pm\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2 \pm a\sqrt{(a^2+b^2)})}.$$

Es hat mithin z vier Werthe, wovon je zwey einander gleich, und entgegengesetzt sind, welche sind

$$\begin{aligned}z' &= +\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}\\ z'' &= -\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}\\ z''' &= +\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}\\ z'''' &= -\sqrt{(a^2+\tfrac{1}{4}b^2-a\sqrt{(a^2+b^2)})}.\end{aligned}$$

Bezeichnet demnach z' den Werth von AO, so bezeichnet z'' den von AO'. Deutet z''' den Werth von AO'' an, so bezeichnet z'''' den Werth von AO'''.

Obige Werthe von y werden aber aus diesen Werthen von z erhalten, wenn mit jedem derselben $-\frac{1}{2}b$ verbunden wird, so dass y' den Werth von AF, y'' den Werth von AE'', y''' den von AE', y'''' den von AF''' be-

zeichnet. Die Werthe von AQ, AQ″, und von AQ′, AQ‴, wenn Q, Q″, Q′, Q‴ die Halbirungspunkte der Linien LH, L″H″, L′H′, L‴H‴ bezeichnen, werden nicht besonders angegeben, weil sie der Lage und Grösse nach dieselbigen sind, wie die von AO, AO′, AO″, AO‴. Weil AO = AQ, und keine der anderen entgegengesetzt ist, so giebt die Algebra auf die Frage, in welcher Entfernung von A der Halbirungspunkt der in dem Nebenwinkel des Winkels BCD liegenden, der Linie b gleichen, Linie liege, nur eine einzige Antwort, weil es nur eine einzige Entfernung giebt, man mag sie in dem einen, oder dem anderen Nebenwinkel suchen, und deutet sie durch $+\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}b^2+a\sqrt{(a^2+b^2)})}$ u. s. w. an. Es bezeichnen desshalb auch obige Werthe von y, welche durch y', y'', y''', y'''' angedeutet werden, nicht, wie es anfangs scheinen konnte, die Linie AF, AH, AF′, AH′, sondern die Linien AF, AE″, AE′, AF‴. Und die Algebra ist hier nicht, wie man glaubt, in dem Falle, die Linien AH, AH′ für negative auszugeben, wenn sie AF, AO″ als positive bezeichnet.

Aufgabe XLIX. (Fig. 44.).

Den Sinus der Hälfte eines gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

Es ist $\cos.(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)=\cos.\frac{1}{2}a.\cos.\frac{1}{2}b-\sin.\frac{1}{2}a.\sin.\frac{1}{2}b.$
Setzt man a = b, so ist $\cos.a = \cos.\frac{1}{2}a^2 - \sin.\frac{1}{2}a^2.$

$$= 1-2(\sin.\ {}^1/_2\, a)^2$$

$$\text{also } \sin.\ {}^1/_2\, a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}.$$

Anmerkung.

Da der Sinus der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus dieses Winkels ausgedrückt wird, der Cosinus CD des Winkels a aber auch der Cosinus anderer Winkel ist, so hat die Algebra den Sinus der Hälfte aller der Winkel auszudrücken, welche CD zum Cosinus haben. Das geschieht durch die Zeichen + —. Die Linie CD ist z. E. auch der Cosinus des erhabenen Winkels ACB′, so wie des hohlen Winkels ACB′. Der Sinus der Hälfte jenes Winkels ist E″F″, dieses E′F. Der Ausdruck für sin. ½ a muss also sowohl den Werth von EF, wenn ACE = ½ ACB ist, als den von E″F″ und von E′F anzeigen, und alles dieses leistet sie durch das doppelte Zeichen.

Aufgabe L. (Fig. 44.)

Den Cosinus der Hälfte eines gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \cos.a = (\cos.\tfrac{1}{2}a)^2 - (\sin.\tfrac{1}{2}a)^2$$
$$= (2\cos.\tfrac{1}{2}a)^2 - 1$$

$$\text{folglich } \cos.\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}.$$

Anmerkung.

Da der Cosinus der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus dieses Winkels ausgedrückt wird, der Cosinus CD des Winkels a aber auch der Cosinus anderer Winkel ist, z. E. des erhabenen Winkels ACB′,

des hohlen Winkels ACB' u. s. w., so muss die Algebra den Cosinus der Hälfte aller der Winkel angeben, welche CD zum Cosinus haben. Und das geschieht durch die Zeichen + —. Der Cosinus der Hälfte des Winkels a ist CF, der Hälfte des erhabenen Winkels ACE' ist CF'', der Hälfte des hohlen Winkels ACB' ist CF, welche Linien alle durch $\pm\sqrt{\frac{1 + \cos . a}{2}}$ ausgedrückt sind.

Aufgabe LI. (Fig. 44.)

Die Secante der Hälfte des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

Es ist $\sec . \tfrac{1}{2} a = \frac{1}{\cos . \tfrac{1}{2} a} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos . a}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + \cos . a}}$.

Anmerkung.

Die Secanten müssen, wenn der Gegensatz der Lage sich vollkommen darstellen soll, u. man nicht in unüberwindliche Schwierigkeiten gerathen will, wie alle übrigen trigonometeischen Linien, auf einer einzigen geraden Linie, namentlich auf einem einzigen Diameter und seiner Verlängerung, dargelegt werden. Das geschieht, wenn man sie als denjenigen Theil eines durch den Anfangspunkt des Bogens gezogenen und verlängerten Diameters definirt, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dem Durchschnittspunkte der durch den Endpunkt des Bogens an den Kreis

gelegten Tangente enthalten ist. Da nun aber die Secante der Hälfte des Winkels a durch den Cosinus CD dieses Winkels ausgedrückt wird, die Linie CD aber auch der Cosinus anderer Winkel, wie, z. E. des erhabenen Winkels ACB', des hohlen Winkels ACB' u. s. w. ist, so hat die Algebra zugleich die Secanten der Hälften aller jener Winkel, welche CD zum Cosinus haben, anzugeben. Das thut sie durch die Zeichen + —. Nämlich die Secante von ½ ACB ist = CH, von der Hälfte des erhabenen Winkels ACB' ist = CH', der Hälfte des hohlen Winkels ACB' = CH etc., Linien, welche einander gleich, und der Lage nach einerley, oder einander entgegengesetzt, also alle in dem Ausdrucke

$\pm \sqrt{\frac{2}{1 + \cos . a}}$ enthalten sind.

Aufgabe LII. (Fig. 44.)

Die Cosecante der Hälfte des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

Es ist $\text{cosec.}\ ^1/_2\, a = \frac{1}{\sin .\ ^1/_2\, a} = \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos . a}{2}}} =$

$\pm \sqrt{\frac{2}{1 - \cos . a}}$.

Anmerkung.

Wenn der Gegensatz der Lage der Cosecanten der verschiedenen Winkel gehörig dargelegt werden soll, und man nicht in unüberwindliche Schwierigkeiten, wie sie die gewöhnliche Behandlung dieser Linie nach sich zieht,

sich verwickeln will, so müssen alle Cosecanten, wie es bey allen übrigen trigonometrischen Linien geschiehet, oder doch geschehen kann, auf einen einzigen Diameter und seine Verlängerung, gelegt werden. Das geschieht, wenn man sie als denjenigen Theil eines, durch den Endpunkt des Quadranten, welcher mit dem Bogen einerley Anfangspunkt hat, gelegten, Durchmessers betrachtet, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dem Durchschnittspunkte der, durch den Endpunkt des Bogens gelegten, Kreistangente enthalten ist. Da nun die Cosecante der Hälfte des Winkels a aus dem Cosinus desselben ausgedrückt wird, so ist dieser Ausdruck auch der Ausdruck für die Cosecanten der Hälften aller anderen Winkel, welche denselben Cosinus haben. Derselbe Cosinus gehört aber auch unter anderen dem erhabenen Winkel ACB′, und dem hohlen Winkel ACB′ zu, also muss der Ausdruck für cosec. ½ a auch die Werthe von cosec. ½ ACB′ enthalten, mag man unter ACB′ den erhabenen, oder den hohlen Winkel verstehen. Das alles geschieht durch die Bestimmung, dass $\mathrm{cosec}.\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos.a}}$ sey. Der Winkel ½ ACB hat zur Cosecante CL, der Winkel ½ ACB′, wenn ACB′ $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\\text{hohl}\end{matrix}\right\}$ ist, $\left\{\begin{matrix}CL\\CL'\end{matrix}\right\}$, und die eine Linie ist der anderen gleich, der Lage nach aber entgegengesetzt.

Aufgabe LIII. (Fig. 45.).

Den Sinus der Summe eines Winkels von 45° und des gegebenen Winkels ACB = a zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \left.\begin{array}{r}\cos.\frac{R-2a}{2}\\ \cos.(45^\circ-a)\\ \sin.(45^\circ+a)\end{array}\right\} \begin{array}{l} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(R-2a)}{2}} \\ = \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}\,. \end{array}$$

Anmerkung.

Da der Sinus von $(45^\circ+a)$ aus dem Sinus des Doppelten des Winkels a ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck von $\sin.(45^\circ+a)$ den Werth von den Sinus aller Winkel enthalten, welche aus 45° und den Winkeln bestehen, deren Doppeltes einen Sinus $=$ GH hat, wenn $\text{arc.}AG = 2.\text{arc.}AB$ ist. Nun hat, z. E., der Winkel ACK, wenn GK⋕AF ist, einen Sinus $KL = GH$, der Winkel, welcher vom Bogen AKQG gemessen wird, hat GH selbst zum Sinus. Also muss $\sin.(45^\circ+a)$ neben dem Werthe von DE, auch, wenn $BD = 45^\circ$ genommen wird, den Werth von $\sin.\left\{\begin{array}{l}45^\circ+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}ACK\\ \frac{2R-2a}{2}\\ R-a\end{array}\right\}\\ 135^\circ-a\end{array}\right\}$ und von $\left\{\begin{array}{l}45^\circ+\left\{\begin{array}{l}\frac{4R+2a}{2}\\ 2R+a\end{array}\right\}\\ 225^\circ+a\end{array}\right\}$ u. s. w. enthalten. Es ist aber $135^\circ-a+45^\circ+a=180^\circ$, also ist $\sin.(135^\circ-a)=\sin.(45^\circ+a)$. Es ist $225^\circ+a-45^\circ-a=180^\circ$, alo ist $\sin(225^\circ+a)= -\sin.(45^\circ+a)$ u. s. w. Mithin drückt die Algebra alles vollständig durch $\pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}$ aus, wie es der geometri-

schen Construction gemäss ist, welche OP = DE als sin(135°—a), und PQ = OP = DE als sin(225°+a) construirt, aber PQ mit OP in die entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LIV. (Fig. 45.).

Den Cosinus des Winkels $= 45° + \left\{\begin{matrix} ACB \\ a \end{matrix}\right\}$ zu finden.

Auflösung.

Es ist
$$\left.\begin{matrix} \sin.\dfrac{R-2a}{2} \\ \sin.(45°-a) \\ \cos.(45°+a) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(R-2a)}{2}} \\ = \pm\sqrt{\dfrac{1-\sin.2a}{2}}. \end{matrix}$$

Anmerkung.

Da cos.(45°+a) aus dem Sinus des Doppelten des Winkels a ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck von cos.(45°+a) den Werth von den Cosinus aller Winkel enthalten, welche aus 45° und den Winkeln bestehen, deren Doppeltes einen Sinus = GH hat. Nun hat z. E. der Winkel ACK, wenn GK # AB gelegt wird, einen Sinus KL = GH, der Winkel, welcher vom Bogen AKQG gemessen wird, hat GH selbst zum Sinus u. s. w. Also muss cos.(45°+a) neben dem Werthe von CE, wenn BD = 45° genommen wird, auch den Cosinus des Winkels von $\left\{\begin{matrix} 45° + \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\,ACK \\ \dfrac{2R-2a}{2} \\ R-a \end{matrix}\right\} \\ 135°-a \end{matrix}\right\}$ und des Winkels von

$$\left\{\begin{matrix} 45^\circ + \left(\begin{matrix}\frac{4R+2a}{2} \\ 2R+a\end{matrix}\right) \\ 225^\circ + a \end{matrix}\right\}$$ u. s. w. enthalten. Es ist aber

$135^\circ - a + 45^\circ + a = 180^\circ$, also ist $\cos.(135^\circ - a) = -\cos.(45^\circ + a)$. Es ist $225^\circ + a - (45^\circ + a) = 180^\circ$, also ist $\cos.(225^\circ + a) = -\cos.(45^\circ + a)$. Mithin drückt die Algebra alles vollständig durch $\pm \sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}$ aus, wie es der geometrischen Darstellung gemäss ist, welche $PC = \cos.(135^\circ - a) = \cos(225^\circ + a) = CE$ macht, und in die entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LV.

Den Sinus des Ueberschusses eines gegebenen Winkels von a° über einen Winkel von 45° zu finden.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix}\sin.\frac{2a-R}{2} \\ \sin.(a-45^\circ)\end{matrix}\right\} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos.(2a-R)}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1-\sin.(2R-2a)}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung.

Es gelten hier dieselben Betrachtungen, wie bey den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe LVI.

Den Cosinus der Differenz der Winkel von a° und 45° zu finden.

Auflösung.

Es ist $\left.\begin{array}{l}\cos.\frac{2a-R}{2}\\ \cos.(a-45^\circ)\end{array}\right\} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(2a-R)}{2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.(2R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung 1.

Hier gelten dieselben Betrachtungen, wie bey den vorhergehenden Aufgaben.

Anmerkung 2.

Eben so ist $\sin.(45^\circ-a) = \sin.\frac{R-2a}{2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos.(R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\sin.2a}{2}};$$

und $\cos.(45^\circ-a) = \cos.\frac{R-2a}{2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos.(R-2a)}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\sin.2a}{2}}.$$

Anmerkung 3.

Zu ganz ähnlichen Betrachtungen führen die Formeln für

$$\sec.(45^\circ + a) = \frac{1}{\cos(45^\circ + a)}, \quad \operatorname{cosec}.(45^\circ + a) = \frac{1}{\sin.(45^\circ + a)}$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 - \sin.2a}{2}}} \qquad = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 + \sin.2a}{2}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{1 - \sin.2a}} \qquad = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + \sin.2a}}$$

$$\sec.(a - 45^\circ) = \frac{1}{\cos.(a - 45^\circ)}, \quad \operatorname{cosec}.(a - 45^\circ) = \frac{1}{\sin.(a - 45^\circ)}$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 + \sin.2a}{2}}} \qquad = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 - \sin.2a}{2}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{1 + \sin.2a}} \qquad = \pm\sqrt{\frac{2}{1 - \sin.2a}}$$

$$\sec.(45^\circ - a) = \frac{1}{\cos.(45^\circ - a)}, \quad \operatorname{cosec}.(45^\circ - a) = \frac{1}{\sin.(45^\circ - a)}$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 + \sin.2a}{2}}} \qquad = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 - \sin.2a}{2}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{1 + \sin.2a}}. \qquad = \pm\sqrt{\frac{2}{1 - \sin.2a}}.$$

Aufgabe LVII. (Fig. 46.).

Den Sinus eines Winkels a aus dem Cosinus zu bestimmen.

Auflösung.

$$(\sin.a)^2 = 1 - (\cos.a)^2$$

$$\text{also } \sin.a = \pm\sqrt{(1-(\cos.a)^2)}.$$

Anmerkung.

Da der Sinus aus dem Cosinus ausgedrückt wird, so enthält der Ausdruck von sin.a den Sinus aller Winkel, welche denselben Cosinus haben. Nun haben z. E. der erhabene Winkel ACD, der hohle Winkel ACD u. s. w. denselben Cosinus CE, wie der Winkel ACB = a. Da nun DE der Sinus der letztgenannten Winkel ist, so giebt der Ausdruck von sin.a sowohl den einen, als den anderen an, indem die Algebra $\sin.a = \pm\sqrt{(1-(\cos.a)^2)}$ setzt.

Aufgabe LVIII. (Fig. 46.).

Den Cosinus des Winkels a aus dem Sinus auszudrücken.

Auflösung.

Es ist $\cos.a = \pm\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}$.

Anmerkung.

Da der Cosinus aus dem Sinus ausgedrückt wird, so giebt der Ausdruck von cos.a die Cosinus aller Winkel an, welche einen Sinus = BE haben. Nun ist sin.ACG = GH

= BE, wenn BG#AC ist. Es ist der Sinus des Winkels, welcher vom Bogen AGDB gemessen wird, = BE u. s. w. und der Cosinus jenes Winkels ist = CH, dieses = CE. Desshalb setzt die Algebra cos . a =

$\pm\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}$, in welchem Ausdruck alle jene Linien enthalten sind.

Aufgabe LIX. (Fig. 46.).

Die Tangente eines Winkels a aus dem Sinus auszudrücken.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \tan.a = \frac{\sin.a}{\cos.a}$$

$$= \pm \frac{\sin.a}{\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}}.$$

Anmerkung 1.

Da die Tangente aus dem Sinus ausgedrückt wird, so muss der Ausdruck für tan.a die Tangenten aller Winkel angeben, welche denselben Sinus haben. Nun haben z. E. der Winkel ACB, und der Winkel ACG denselben Sinus, also muss tan.a sowohl die Tangente von ACB, als von ACG angeben, und das geschieht durch $\tan.a = \pm\frac{\sin.a}{\sqrt{(1-(\sin.a)^2)}}$, während die Geometrie die Tangenten KA, AL der zu jenen Winkeln gehörigen Bogen einander gleich, aber in gerade entgegengesetzter Richtung darlegt.

Anmerkung 2.

In ganz ähnlicher Art verhält es sich mit den Ausdrücken der Tangente aus dem Cosinus, der Cotangente aus dem Sinus, oder dem Cosinus u. s. w.

Aufgabe LX. (Fig. 46.).

Den Cosinus eines Winkels a aus der Tangente auszudrücken.

Auflösung.

$$\text{Es ist } \cos . a = \frac{1}{\sec . a}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{(1+(\tan . a)^2)}}.$$

Anmerkung.

Zu jeder Tangente, sie sey positiv, oder negativ, gehört also ein doppelter Cosinus. Nämlich AK ist sowohl die Tangente von arc. AB, als z. E. von arc. AGM, wenn BM ein Durchmesser ist. Jener Bogen hat CE, dieser CH zum Cosinus, wovon dieser jenem gleich ist, aber entgegengesetzt liegt. AL ist die Tangente des Bogens AB und z. E. zugleich des Bogens AGD, wovon jener CH, dieser CE zum Cosinus hat, und jener diesem gleich ist, aber entgegengesetzt liegt.

Aufgabe LXI.

Die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe zu suchen, deren erstes Glied = 1, Differenz = 1, und Summe der Glieder = 10 sey.

Auflösung.

Aus bekannten Gründen muss, wenn x die Anzahl der Glieder bezeichnet, die Gleichung statt finden

$$\frac{x(x+1)}{2} = 10$$

$$\text{also } x^2+x = 20$$

$$\text{folglich } x^2+x+\tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$

$$\text{mithin } x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

demnach hat x die Werthe $\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}+\frac{9}{2} = +4 \\ -\frac{1}{2}-\frac{9}{2} = -5 \end{matrix}\right\}$.

Es weiset also die Algebra auf zwey Reihen hin, wovon die eine aus 4, die andere aus -5 Gliedern bestehet, in deren einer das letzte Glied also auch $= +4$, der anderen $= -5$ ist.

Anmerkung 1.

Setzt man das erste Glied der Reihe $= 0$, die Differenz $= 1$, die Summe $= 10$, und sucht die Anzahl x der Glieder, so hat man die Gleichung

$$\frac{x(x-1)}{2} = 10$$

$$\text{also } x^2 - x = 20$$

$$\text{folglich } x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$
$$= \tfrac{81}{4}$$

$$\text{mithin } x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{81}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{9}{2}$$

demnach entweder $x = +5$

oder $x = -4$.

Sucht man das letzte Glied U dieser Reihe, unabhängig von dieser Rechnung, so hat man die Gleichung

$$\frac{U(U+1)}{2} = 10$$

$$\text{also } U^2 + U = 20$$

$$\text{folglich } U^2+U+\tfrac{1}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$
$$= \tfrac{81}{4}$$

$$\text{mithin } U = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{81}{4}}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{9}{2};$$
$$\text{demnach entweder } U = +4$$
$$\text{oder } U = -5.$$

Anmerkung 2.

Die Algebra hat es in allen diesen Aufgaben mit der folgenden Reihe zu thun:

$$-5 \; -4 \; -3 \; -2 \; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

und sie giebt auf die in der Aufgabe ihr vorgelegte Frage, wie gross die Anzahl x der Glieder dieser Reihe sey, wenn 1 das erste Glied genannt, und die Hälfte des Produktes aus der Anzahl der Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes = 10 gesetzt wird, die doppelte Antwort, es sey $x = +4$, oder $= -5$. Soll die Reihe mit 0 anfangen, so antwortet sie in Anmerkung 1 auf die Frage, wie gross die Anzahl der Glieder dieser Reihe sey, wenn die Hälfte des Produktes aus der Anzahl der Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes = 10 gesetzt wird, auf die doppelte Weise, es sey $x = +5$ oder $x = -4$. Oder sie sagt, wenn nach dem letzten Gliede U gefragt wird, es sey $U = +4$, oder $U = -5$. Beide Reihen 0 1 2 3 4, und $-5 \; -4 \; -3 \; -2 \; -1 \;\; 0$ leisten das Verlangte.

Und so dient auch dies zu einem Beispiel, wie die Algebra niemals eine doppelte Antwort giebt, wenn nur eine einfache statt finden kann.

Aufgabe LXII.

Eine Gesellschaft tritt zu einem gemeinschaftlichen Handlungsgeschäfte zusammen. Jedes Glied legt doppelt so viel Thaler ein, als die Zahl der Glieder der Gesellschaft anzeigt. Auf 100 des Kassenbestandes werden so viel Thaler gewonnen, als die Einlage eines Gliedes beträgt. Der Totalgewinn ist der doppelten Einlage eines Jeden gleich. Aus wie viel Gliedern bestand die Gesellschaft?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Glieder $= x$
so ist die Einlage eines jeden $= 2x$;
also die Gesammt-Einlage $= 2x^3$;
mithin verhält sich $100 : 2x^2 = 2x :$ Totalgewinn.

Folglich ist der Totalgewinn $= \frac{4x^3}{100}$. Demnach ist

$$\frac{4x^3}{100} = 4x$$

$$\text{somit } \frac{x^2}{100} = 1$$

$$\text{also } x^2 = 100$$

$$\text{mithin } x = \pm 10.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung folgender Aufgabe:

Eine Gesellschaft löset ein gemeinschaftliches Handlungsgeschäft auf. Jedes Glied erhält doppelt so viel Thaler, als die Zahl der Glieder der Gesellschaft beträgt.

Auf 100 des Kassenbestandes werden so viel Thaler verloren, als der Antheil eines Gliedes anzeigt. Der Totalverlust ist dem doppelten Antheil eines Jeden gleich. Aus wie viel Gliedern bestand die Gesellschaft?

Aufgabe LXIII.

Es leiht Jemand zwey Capitalien aus, deren Summe = 13000, und von welchen er gleich viel Zinsen zu verschiedenem Zinsfusse bezieht. Wäre das erste Capital zu dem Zinsfusse des zweiten, das zweite zu dem Zinsfusse des ersten ausgeliehen, so würde er von jenem 360 Thaler, von diesem 490 Thaler Zinsen erhalten. Welches waren die Capitalien, und welches war der Zinsfuss eines Jeden?

Auflösung.

Das eine Capital sey = S, so ist das andere = 13000 - S. Ist der Zinsfuss des ersten = x, des zweiten = y, so ist

$$\frac{S}{100}.x = \frac{13000-S}{100}y, \quad \frac{S}{100}y = 360, \quad \frac{13000-S}{100}x = 490$$

also $Sx = (13000-S)y$, $Sy = 36000$, $(13000-S)x = 49000$

folglich $\frac{Sx}{13000-S} = y$, $y = \frac{36000}{S}$, $x = \frac{49000}{13000-S}$.

$$\text{mithin } \frac{Sx}{13000-S} = \frac{36000}{S}$$

$$\text{somit } x = \frac{36000(13000-S)}{S^2}$$

demnach $\frac{36000(13000-S)}{S^2} = \frac{49000}{13000-S}$

also $36(13000-S)^2 = 49 \cdot S^2$

folglich $6(13000-S) = \pm 7S$

mithin $6.13000 = (6 \pm 7)S$

somit $S = \frac{6.13000}{6 \pm 7}$

demnach ist entweder $S = \frac{6.13000}{13}$

$= 6000;$

oder $S = \frac{6.13000}{-1}$

$= -78000;$

somit das andere Capital entweder $= 13000 - 6000$

$= 7000;$

oder $= 13000-(-78000)$

$= 91000.$

Der Werth von y ist entweder $= \frac{36000}{6000}$

$= 6;$

oder $= \frac{36000}{-78000}$

$= -\frac{36}{78}$

$= -\frac{6}{13}.$

Der Werth von x ist entweder $= \frac{49000}{7000}$

$= 7;$

$$\text{oder} = \frac{49000}{91000}$$
$$= \tfrac{49}{91}$$
$$= \tfrac{7}{13}.$$

Anmerkung.

Die ersten Werthe von S, x, y lösen die Aufgabe in dem Sinne der Aussage auf. Die zweiten Werthe beantworten folgende Frage:

Jemand verschuldet zwey Capitalien, deren Differenz = 13000, und von welchen er gleich viel Zinsen zu ungleichem Zinsfusse bezahlt. Verzinsete er das erste Capital zu dem Zinsfusse des zweiten, das zweite zu dem Zinsfusse des ersten, so würde er von jenem 360, von diesem 490 bezahlen. Welches waren die Capitalien, und welches war der Zinsfuss derselben?

Aufgabe LXIV.

Die Nachlassenschaft eines Mannes wird unter seine Kinder vertheilt. Jedes erhält so vielmal 1000 Thaler, als Kinder sind. Von jedem 100 der Nachlassenschaft werden dreymal so viel Thaler, als Kinder sind, an eine wohlthätige Kasse abgegeben. Es ist $\frac{1}{750}$ dieser Abgabe der Zahl der Kinder gleich. Wie viel Kinder sind es?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Kinder $= x$,

so ist der Antheil eines Jeden $= 1000x$

folglich die ganze Nachlassenschaft $= 1000x^2$

mithin $100 : 1000\,x^2 = 3\,x$: Abgabe

somit die Abgabe $= 30\,x^3$;

demnach $\frac{1}{750}\,30\,x^3 = x$

also $\frac{1}{25}\,x^2 = 1$

folglich $x^2 = 25$

somit $x = \pm 5$.

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Die Nachlassenschaft eines Mannes wird durch seine Kinder zusammengebracht. Jedes bezahlt so vielmal 1000 Thaler, als Kinder sind. Zu jedem 1000 der Nachlassenschaft werden dreymal so viel Thaler, als Kinder sind, aus einer wohlthätigen Kasse zugeschossen. Es ist $\frac{1}{750}$ dieses Zuschusses der Anzahl der Kinder gleich. Wieviel Kinder sind es?

Aufgabe LXV.

Jemand kaufte einen Garten für x Thaler, und verkauft ihn wieder zu 144 Thaler. Statt 100 des Einkaufspreises bekommt er $x + 100$ zurück. Wie gross ist der Einkaufspreis?

Auflösung.

Es ist $100 : x = x + 100 : 144$

also $\left.\begin{array}{r} x(x+100) \\ x^2 + 100\,x \end{array}\right\} = 14400$

$$\text{folglich } (x+50)^2 = 14400+2500$$
$$= 16900$$

$$\text{mithin } x = -50 \pm 130$$
$$= \begin{cases} 80 \\ -180 \end{cases}.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x enthält die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Es verkauft Jemand einen Garten für x Thaler, und hat ihn für 144 Thaler angekauft. Statt 100 des Verkaufspreises hatte er x—100 bezahlt. Wie gross ist der Verkaufspreis?

Aufgabe LXVI.

Jemand kauft einige Ries Papier für 10 Thaler. Hätte er für dasselbe Geld 3 Ries mehr erhalten, so hätte jedes 3 Thaler weniger gekostet. Wie viel Ries kaufte er?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Ries = x, so kostet ein Ries $\frac{10}{x}$ Thaler. Wären der Ries 3 mehr gewesen, so hätte jedes Ries $\frac{10}{x+3}$ Thaler gekostet, also ist

$$\frac{10}{x} = \frac{10}{x+3} + 3$$

$$\text{folglich } \left.\begin{array}{l} 10(x+3) \\ 10x+30 \end{array}\right\} = 10x + \left\{\begin{array}{l} 3x(x+3) \\ 3x^2+9x \end{array}\right.$$

$$\text{mithin } 30 = 3x^2+9x$$

$$\text{somit } 10 = x^2+3x$$

$$\text{demnach } \left.\begin{array}{l}10 + \frac{9}{4}\\ \frac{49}{4}\end{array}\right\} = (x+\tfrac{3}{2})^2$$

$$\text{also } x = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{7}{2}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}2\\ -5\end{array}\right\}.$$

Anmerkung.

Der negative Werth von x beantwortet folgende Frage:

Jemand verkauft einige Ries Papier für 10 Thaler. Hätte er für dasselbe Geld 3 Ries weniger verkauft, so hätte jedes Ries 3 Thaler mehr gekostet. Wie viel Ries verkaufte er?

Aufgabe LXVII. (Fig. 47.).

Die Polargleichung der Parabel zu finden, wenn der Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Bezeichnet man den Radius Vector FM durch z, den Winkel AFM durch φ, das von dem Punkte M auf die Achse gefällte Perpendikel MP durch y, die dazu gehörige Abscisse AP durch x, so ist

$$FP = z.\cos.MFP, \qquad \left.\begin{array}{l}MP\\ y\end{array}\right\} \begin{array}{l}= z.\sin.MFP\\ = z.\sin.\varphi\end{array}$$

$$= -z.\cos.\varphi$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{4}p - z.\cos.\varphi$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{folglich } px \\ y^2 \\ z^2 \sin.\varphi^2 \\ z^2(1-(\cos.\varphi)^2)\end{array}\right\} = \tfrac{1}{4}p^2 - pz\cos.\varphi$$

$$\text{mithin } z^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - pz.\cos.\varphi + z^2(\cos.\varphi)^2$$

$$\text{somit } z = \pm(\tfrac{1}{2}p - z.\cos.\varphi)$$

$$\text{demnach } z(1 \pm \cos.\varphi) = \pm \tfrac{1}{2}p.$$

Es hat also z zwey Werthe, welche sind

$$z = +\frac{\tfrac{1}{2}p}{1+\cos.\varphi}, \qquad z = -\frac{\tfrac{1}{2}p}{1-\cos.\varphi}$$

$$= +\frac{\tfrac{1}{2}p}{2(\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2} \qquad = -\frac{\tfrac{1}{2}p}{2(\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}$$

$$= +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2} \qquad = -\frac{p}{(2\sin.\tfrac{1}{2}\varphi^2)};$$

von welchen Werthen der eine positiv, der andere negativ ist, der eine die Linie FM, der andere die ihr entgegengesetzt liegende Linie FN bezeichnet.

Anmerkung 1.

Wollte man diese Aufgabe dadurch auflösen, dass man $\left.\begin{array}{r}FM \\ z\end{array}\right\} = \tfrac{1}{4}p + x$ setzte, wie es in den meisten Lehrbüchern geschiehet, so würde man erhalten

$$z = \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{4}p - z.\cos.\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}p - z.\cos.\varphi$$

$$\text{also } z(1+\cos.\varphi) = \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{folglich } z = \frac{\tfrac{1}{2}p}{1+\cos.\varphi}$$

$$= +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}.$$

Es würde mithin nur der eine Werth von z, welcher dem Winkel φ zugehört, gefunden, welches mangelhaft wäre. Setzt man aber, wie allein richtig ist,

$$z = \pm(\tfrac{1}{4}p+x), \text{ weil } z^2 = y^2+(x-\tfrac{1}{4}p)^2$$
$$= px+x^2-\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2$$
$$= x^2+\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2$$
$$= (x+\tfrac{1}{4}p)^2$$

$$\text{also } z = \pm(x+\tfrac{1}{4}p);$$

so erhält man
$$z = \pm(\tfrac{1}{4}p+\tfrac{1}{4}p-z\cos.\varphi)$$
$$= \pm(\tfrac{1}{2}p-z.\cos.\varphi)$$
$$= \pm\tfrac{1}{2}p\mp z.\cos.\varphi$$

$$\text{mithin } z(1\mp\cos.\varphi) = \pm\tfrac{1}{2}p$$

$$\text{somit } z = +\frac{p}{(2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)^2}, \quad z = -\frac{p}{(2\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)^2};$$

Und daraus erhellet die Nothwendigkeit, die negativen Ausdrücke nicht zu verwerfen.

Anmerkung 2.

Macht man auf der Verlängerung von AF die Linie FA' = AF, und construirt eine Parabel, deren Achse A'F, und Brennpunkt F ist, nimmt man auch FP' = FP, und construirt die zu A'P' gehörige Ordinate P'M'; so ist, wenn die gerade Linie FM' gezogen wird,

$$FM'^2 = FP'^2+P'M'^2$$
$$= FP^2+PM^2$$

$$= (AP - AF)^2 + PM^2$$
$$= (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + y^2$$
$$= x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 + px$$
$$= x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2\,;$$

mithin ist sowohl FM'^2, als $FM^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2$. Die Algebra hat also in der Quadratwurzel von $x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ sowohl den Werth von FM, als den von FM' auszudrücken, und das thut sie dadurch, dass sie die Quadratwurzel aus $x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = \pm(x + \frac{1}{4}p)$ setzt, gleichwie die Linien FM, FM' einander gleich sind, und einander entgegengesetzt liegen. Es antwortet mithin die Algebra in der Gleichung $z = \pm(x + \frac{1}{4}p)$ erschöpfend auf die Frage: welches ist der Werth des zu einer gegebenen Abscisse gehörigen Radius Vectors einer Parabel, deren Brennpunkt in F liegt, und Parameter $= p$ ist? Da es in der Frage unentschieden bleibt, ob der Scheitel in A, oder A' liegt, da auch die von A, oder A' genommenen Abscissen nicht einander entgegengesetzt liegen, also jede mit dem Zeichen + zu versehen ist, so ertheilt sie die dadurch bestimmte doppelte Antwort.

Aufgabe LXVIII. (Fig. 48.)

Die Polargleichung der Hyperbel zu finden, wenn ein Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Es sey HF die Hauptachse, F ein Brennpunkt, C der Mittelpunkt, M ein Punkt der Hyperbel, MP eine

Ordinate der Achse, FM = z, AFM = φ, die Hauptachse = a, die Nebenachse = b, so ist

$$MP = z.\sin.\varphi, \quad FP = z.\cos.\varphi, \quad CF = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}$$

also $MP^2 = z^2(\sin.\varphi)^2$, $CP = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)} - z.\cos.\varphi$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} z^2(\sin.\varphi)^2 \\ z^2(1-(\cos.\varphi)^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{b^2}{a^2}((\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} - z.\cos.\varphi)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \\ = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \end{array}$$

mithin

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2(1+\frac{a^2}{b^2}))$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - 2z\cos.\varphi\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)} + z^2(\cos.\varphi)^2\frac{\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2}{\tfrac{1}{4}b^2})$$

$$\text{somit } z = \pm\frac{b}{a}\left(\frac{1/2\,b - z\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\,b}\right)$$

$$\text{demnach } z\left(1 \pm \frac{b}{a}\frac{\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\,b}\right) = \pm 1/2\frac{b^2}{a}$$

$$\text{also } z = \frac{\pm 1/2\frac{b^2}{a}}{1 \pm \frac{\cos.\varphi.\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)}}{1/2\,a}}$$

$$= \pm\frac{1/2\,b^2}{a \pm \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{folglich entweder } z = +\frac{1/2\,b^2}{a + \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{oder } z = -\frac{1/2\,b^2}{a - \cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Zusatz.

1) Ist $\varphi = o$. so ist

der erste Werth von $z = + \frac{1/2\, b^2}{a + \surd(a^2 + b^2)}$

$$= + \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

$$= \frac{CF^2 - \frac{1}{4}a^2}{CF + 1/2\, a}$$

$$= CF - 1/_2\, a;$$

der zweite Werth von $z = - \frac{1/_2\, b^2}{a - \surd(a^2 + b^2)}$

$$= - \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}.$$

$$= - \frac{CF^2 - \frac{1}{4}a^2}{1/2\, a - CF}$$

$$= \frac{CF^2 - \frac{1}{4}a^2}{CF - 1/_2\, a}$$

$$= CF + 1/_2\, a.$$

2.) Ist $\varphi < R$, so ist $\cos.\varphi$ positiv, also der erste Werth von z positiv, der zweite $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{unendlich}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $a \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \cos.\varphi.\surd(a^2 + b^2)$

---

also $\frac{a^2}{a^2 + b^2} \begin{matrix}>\\=\\>\end{matrix} (\cos.\varphi)^2$

$$\text{folglich } \frac{a^2+b^2}{a^2} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \begin{cases} \dfrac{1}{(\cos.\varphi)^2} \\ (\sec.\varphi)^2 \end{cases}$$

$$\text{mithin } \left.\begin{matrix} \dfrac{a^2+b^2}{a^2} - 1 \\ \dfrac{b^2}{a^2} \\ (\tan.\alpha)^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \begin{cases} (\sec.\varphi)^2 - 1 \\ (\tan.\varphi)^2 \end{cases}$$

wenn α den halben Asymptotenwinkel bezeichnet;

$$\text{somit tnn.}\alpha \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \tan.\varphi$$

$$\text{demnach } \alpha \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \varphi.$$

3.) Ist $\varphi \begin{Bmatrix} > R \\ < 2R \end{Bmatrix}$, so ist $\cos.\varphi$ negativ, also der zweite Werth von z negativ, der erste dagegen $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{unendlich} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$,

je nachd. $a + \cos.\varphi.\sqrt{(a^2 + b^2)} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0$

$$\text{also } \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} - \cos.\varphi$$

$$\text{folglich } \frac{a^2}{a^2+b^2} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} (\cos.\varphi)^2$$

$$\text{mithin } \frac{a^2+b^2}{a^2} \begin{Bmatrix} < \\ = \\ < \end{Bmatrix} (\sec.\varphi)^2$$

$$\text{somit}\ \left.\begin{array}{r}\dfrac{a^2+b^2}{a^2}-1\\ \dfrac{b^2}{a^2}\\ (\tan.\alpha)^2\\ (\tan.(2R-\alpha))^2\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}(\sec.\varphi)^2-1\\ (\tan.\varphi)^2\end{array}\right.$$

$$\text{demnach}\ \tan.(2R-\alpha)\left\{\begin{array}{c}<\\=\\>\end{array}\right\}\tan.\varphi$$

$$\text{also}\ 2R-\alpha\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\varphi$$

$$\text{folglich}\ 2R\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\alpha+\varphi.$$

Anmerkung 1.

Nach dem Grundsatze, dass der grösseren, oder kleineren Quadratzahl die grössere, oder kleinere Wurzel zugehöre, wird hier aus der Bedingung, dass $(\tan.(2R-\alpha))^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} (\tan.\varphi)^2$ sey, hergeleitet, es müsse auch $\tan.(2R-\alpha) \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \tan.\varphi$ seyn.

Es ist $1:\tan.(2R-\alpha)=\tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$,
und $1:\tan.\varphi = \tan.\varphi:(\tan.\varphi)^2$.

Wenn $(\tan.(2R-\alpha))^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} (\tan.\varphi)^2$ gesetzt wird, so ist die positive Einheit als das Maass beider Grössen gedacht. Es ist aber $\tan.(2R-\alpha)$ sowohl, als $\tan.\varphi$ negativ,

weil $2R-\alpha$ und φ stumpfe Winkel sind. Werden die Glieder der zweiten Verhältnisse in beiden Proportionen, nämlich $(\tan.(2R-\alpha))^2$ und $\tan.(2R-\alpha)$, $(\tan.\varphi)^2$ und $\tan.\varphi$ durch die positive Einheit gemessen, so ist in beiden Verhältnissen das zweite Glied grösser, als das erste, also auch in den ersten Verhältnissen jener Proportionen das zweite Glied grösser, als das erste, d. h. sowohl $\tan.(2R-\alpha) > 1$, als $\tan.\varphi > 1$. Das findet aber, weil $\tan.(2R-\alpha)$ und $\tan.\varphi$ negative Zahlen sind, nur statt, wenn die Glieder durch die negative Einheit gemessen werden; mithin ist auch, wenn $\tan.(2R-\alpha) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \tan.\varphi$ gesetzt wird, die negative Einheit das Maass beider Glieder. Demnach gehört der in diesem Sinne kleineren, oder grösseren Tangente der grössere, oder kleinere Winkel zu. Folglich ist die Folgerung richtig, dass $2R-\alpha \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \varphi$ sey, wie es aus einer rein geometrischen Betrachtung gleichfalls hervorgeht.

Anmerkung 2.

Zur Bestimmung des ersten Werthes von z für den Fall, dass $\varphi \begin{Bmatrix} > R \\ < 2R \end{Bmatrix}$ ist, hätte auch folgendermaassen geschlossen werden können. Es sey dieser Werth von

$$z \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{unendlich} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}, \text{ je nachdem } a+\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

$$\text{also } \cos.\varphi \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} -\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\text{folglich } (\cos.\varphi)^2 \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$\text{mithin } (\sec.\varphi)^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$\text{somit } (\tan.\varphi)^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \begin{cases}\dfrac{b^2}{a^2}\\ (\tan.(2\,R-\alpha))^2\end{cases}$$

$$\text{demnach } \tan.\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \tan.(2\,R-\alpha)$$

$$\text{also } \varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2\,R-\alpha$$

$$\text{folglich } \alpha+\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2\,R.$$

Ist nämlich $a+\cos.\varphi.\sqrt{(a^2+b^2)} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 0$, so ist die positive Einheit das Maass beider Grössen, also auch der Grössen $\cos.\varphi$ und $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Nun ist $1:\cos.\varphi = \cos.\varphi:(\cos.\varphi)^2$, $1:-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = -\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} : \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Werden die negativen Glieder $\cos.\varphi$, $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ der ersten Verhältnisse beider Proportionen durch die positive

Einheit gemessen, so ist das erste Glied 1 in beiden Verhältnissen grösser, als das zweite, also auch in beiden Proportionen das dritte Glied grösser, als das vierte, d. h. $\cos.\varphi > (\cos.\varphi)^2$, $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Ist aber die negative Grösse $\cos.\varphi$ grösser, als die positive $(\cos.\varphi)^2$, und $-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > \frac{a^2}{a^2+b^2}$, so ist die negative Einheit das Maass beider Grössen, mithin auch sowohl von $(\cos.\varphi)^2$, als von $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; demnach auch von $(\tan.\varphi)^2$ und $(\tan.(2R-\alpha))^2$. Es ist aber $1:\tan.\varphi = \tan.\varphi:(\tan.\varphi)^2$, $1:\tan.(2R-\alpha) = \tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$. Also ist die negative Einheit das Maass der Verhältnisse $\tan.\varphi:\tan.\varphi^2$, $\tan.(2R-\alpha):(\tan.(2R-\alpha))^2$, und weil $\tan.\varphi$, $\tan.(2R-\alpha)$ negativ sind, sowohl $\tan.(2R-\alpha) > (\tan.(2R-\alpha))^2$, als $\tan.\varphi > (\tan.\varphi)^2$, folglich in beiden Proportionen das erste Glied grösser, als das zweite, d. h. $1 > \tan.\varphi$, $1 > \tan.(2R-\alpha)$, mithin die positive Einheit das Maass beider Verhältnisse, somit auch von $\tan.\varphi$, $\tan.(2R-\alpha)$. Und da $\tan.\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} (\tan.(2R-\alpha)$, so gehört der kleineren, oder grösseren Tangente der kleinere, oder grössere stumpfe Winkel zu, d. h. es ist $\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2R-\alpha$, folglich $\alpha+\varphi \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 2R$, übereinstimmend mit dem vorhergehenden.

Anmerkung 3.

Carnot stellt auf den Vorgang von d'Alembert dem Satze, dass die negativen Grössen < 0 seyen, die Proportion entgegen, es sey $+1:-1 = -1:+1$. (A). Setzt

man nun, sagt er, $-1<0$, also noch vielmehr $-1<+1$, so ist in dieser Proportion das erste Glied grösser, als das zweite, folglich ist auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-1 > +1$, welches der Annahme widerspricht.

Er hätte eben so eine andere Proportion, wie $+4:-2 = -3:+2$ (B.) nehmen, und sagen können: setzt man $-2 < 0$, also noch mehr $-2 < +3$, so ist das erste Glied grösser, als das zweite, also auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-3 > +2$, welches jener Annahme widerspricht.

Der Ehrfurcht, welche die Mathematik einflösst, angemessener dürfte es seyn, wenn Carnot in jener Proportion folgendermaassen geschlossen hätte: »Da $+1:-1 =$ »$-1:+1$ ist, so muss, wenn $+1 > -1$, also das erste »Glied grösser, als das zweite gesetzt wird, auch das »dritte Glied grösser, als das vierte, d. h. $-1>+1$ seyn;« oder in dieser also: »da $+3:-2 = -3:+2$ ist, »so ist, wenn $+3 > -2$, also das erste Glied grösser, »als das zweite gesetzt wird, auch das dritte grösser, als »das vierte, d. h. $-3 > +2$.«

Eben so hätte er in der Proportion $+2:+3 = -2:-3$ (C.) folgenden Schluss machen können: Da $+2 < +3$, also das erste Glied kleiner, als das zweite ist, so ist auch das dritte kleiner, als das vierte, d. h. $-2 < -3$; oder in der Proportion $+3:+2 = -3:-2$ (D.) folgenden: Es ist $+3 > +2$, also das erste Glied grösser, als das zweite, folglich ist das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-3 > -2$.

Und des Mathematikers Aufgabe ist es, da an der Wahrheit dieser Sätze, weil aus wahren Sätzen nichts Falsches gefolgert werden kann, nicht zu zweifeln ist, diese Wahrheit zu erkennen sich zu bemühen, wenn sie auch einander geradezu zu widersprechen scheinen.

Zwey Grössen können nur dann mit einander verglichen werden, wenn sie sich auf einerley Einheit beziehen. Von zwey gleichartigen Grössen heisst die eine grösser, als die andere, wenn in jener die Einheit öfter wiederhohlt ist, als in der anderen. In der Reihe der natürlichen Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 etc. wird darum die nachfolgende grösser genannt, als die vorhergehende, weil die positive Einheit in jener öfter vorkommt, als in dieser. Setzt man die Reihe über dar erste Glied hinaus fort, dass sie wird

$$-7-6-5-4-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7 \text{ etc.}$$

so herrscht auf der anderen Seite der Nulle dasselbe Gesetz, wie auf der einen, und es muss darum -5 eben so gewiss kleiner als -4 genannt werden, als $+4$ kleiner, als $+5$ gesetzt wird. In so fern also die positive Einheit als das Maass einer negativen Grösse und einer positiven angesehen wird, ist die negative kleiner, als die positive.

Die Reihe $-1\ -2\ -3\ -4\ -5\ -6$ etc. kann auch geschrieben werden

$$1(-1)\ 2(-1)\ 3(-1)\ 4(-1)\ 5(-1)\ 6(-1) \text{ etc.}$$

In dem nachfolgenden Gliede ist die negative Einheit öfter enthalten, als in dem vorhergehenden. Also darf das nachfolgende grösser gesetzt werden, als das vorhergehende. Setzt man die Reihe über das erste Glied hinaus fort, dase sie wird

$$\text{etc. } +6+5+4+3+2+1+0-1-2-3-4-5-6 \text{ etc.}$$

so herrscht links von der Nulle dasselbe Gesetz, wie rechts von derselben; es muss desshalb $+3$ eben so gewiss kleiner, als $+2$ gesetzt werden, als -2 kleiner, als

-3 gesetzt wurde. In so fern also die negative Einheit als das Maass einer negativen und einer positiven Grösse betrachtet wird, ist die negative grösser, als die positive.

Um mithin von zwey gleichartigen Grössen überhaupt, sie seyen beide negativ, oder beide positiv, oder es sey die eine negativ, die andere positiv, beurtheilen zu können, welche die grössere sey, muss vorher bestimmt werden, ob die positive, oder die negative Einheit zum Maasse genommen werden solle. Ohne dies bestimmt zu haben, lässt sich eben so richtig sagen, es sey $+5 > -3$, als es sey $+5 < -3$, es sey $-5 > -3$, als es sey $-5 < -3$, es sey $+5 > +3$, als es sey $+5 < +3$; gleichwie auf die Frage, »wer hat am meisten von zwey Personen, wovon die eine »3000 Thaler Vermögen, die andere 2000 Thaler Schulden »hat?« nicht eher geantwortet werden kann, als bis festgesetzt ist, ob die Frage heisst: »wer hat am meisten Vermögen?«, oder: »wer hat am meisten Schulden?« In jenem Falle hat die eine, in diesem die andere am meisten.

Wenn, in der Proportion A, $+1 < -1$ gesetzt wird, so ist die positive Einheit, also das erste Glied das Maass für beide Glieder des ersten Verhältnisses, folglich muss das dritte Glied, d. h. die negative Einheit, das Maass für die Gieder des letzten Verhältnisses seyn. Misst man aber -1 und $+1$ durch -1, wer wirds läugnen, dass alsdann $-1 > +1$ sey?

Eben so verhält es sich mit der Proportion B. Setzt man das erste Glied grösser, als das zweite, d. h. $+3 > -2$, so ist dieses in so fern wahr, als die positive Einheit zum Maasse für beide Glieder genommen wird; und nun muss das dritte Glied grösser seyn, als das vierte, d. h. $-3 > +2$, welches wahr ist, sobald man die negative Einheit als das Maass beider Zahlen annimmt.

Es liegt mithin in den Proportionen A, B nichts widersprechendes, und Carnot kann daraus nichts gegen die Annahme herleiten, dass das negative kleiner, als o, und kleiner, als jede positive Grösse sey.

Nimmt man, in den Proportionen C, D, $+3 > +2$, so ist auch $-3 > -2$, weil, wenn das $\left\{\begin{matrix}\text{zweite}\\ \text{erste}\end{matrix}\right\}$ Glied grösser, als das $\left\{\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\end{matrix}\right\}$ gesetzt wird, auch das $\left\{\begin{matrix}\text{vierte}\\ \text{dritte}\end{matrix}\right\}$ grösser, als das $\left\{\begin{matrix}\text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ gesetzt werden muss. Es ist aber auch $-3 > -2$, wenn man die negative Einheit als das Maass für beide Glieder ansieht. Ist aber $-3 > -2$, so ist auch $-1 > 0$. Ebenso kann $-7 > -3$ angesehen werden, also auch $-4 > 0$, mithin auch $-3 > +1$ u. s. w.

Diese Ansichten überheben auch den Mathematiker, Ausnahmen von den Grundsätzen gelten zu lassen, wie in den Capiteln über die Ungleichheiten in mathematischen Lehrbüchern, französischen und deutschen, angetroffen werden. Wer wird z. E. die Grundsätze aufgeben wollen, zwey ungleiche Grössen mit gleichem multiplicirt, oder durch gleiches dividirt, giebt ungleiches, und zwar die Multiplication, oder Division des grösseren giebt das grössere, oder, das grössere mit dem grösseren multiplicirt giebt das grössere, das grössere durch das kleinere dividirt giebt das grössere.

Doch findet man bey vielen Schriftstellern, z. E. bey Cauchy in der Analyse algébrique, Behauptungen, wie folgende:

Es ist $\frac{8 > 7,}{-3 = -3,}$ $\frac{8 > 7,}{-3 = -3,}$ $\frac{a > b,}{-m = -m,}$ $\frac{a > b}{-m = -m}$

und doch $-24 < -21$, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$, $-am < -bm$, $-\frac{a}{m} < -\frac{b}{m}$.

Dagegen ist folgendes zu erinnern. Es kann gesetzt werden $+1 : +8 = -3 : -24$, $+1 : +7 = -3 : -21$. Setzt man die positive Einheit als das Maass für die Glieder der ersten Verhältnisse in beiden Proportionen, so ist sowohl $+1 < +8$, als $+1 < +7$, folglich sowohl in der ersten Proportion $-3 < -24$, als in der zweiten $-3 < -21$, also ist die negative Einheit das Maass der Glieder beider Verhältnisse, folglich auch von -24 und -21, mithin ist $-24 > -21$. Demnach muss, wenn $8 > 7$, $-3 = -3$ ist, auch $(+8)(-3) > (+7)(-3)$ gesetzt werden,

Es ist $-3 : 1 = 8 : -\frac{8}{3}$, $-3 : 1 = 7 : -\frac{7}{3}$. Setzt man die positive Einheit als Maass für die Glieder der ersten Verhältnisse in beiden Proportionen, so ist $-3 < +1$, also sowohl $+8 < -\frac{8}{3}$, als $+7 < -\frac{7}{3}$, mithin die negative Einheit das Maass für die Glieder beider Verhältnisse, folglich auch für $-\frac{8}{3}$, $-\frac{7}{3}$, also ist $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{3}$ u. s. w.

Eben so findet man die Behauptung, dass, wenn $-3 < +2$ gesetzt würde, doch $(-3)^2 > (+2)^2$ seyn müsse. — Dagegen ist folgendes zu erinnern. Es ist $+1 : -3 = -3 : +9$. Wird nun $-3 < +2$ gesetzt, so ist $+1$ das Maass für beide Zahlen, also ist auch $+1 > -3$, mithin das dritte Glied $>$ das vierte, d. h. $-3 > +9$, folglich -1 das Maass für -3, $+9$. Ist aber -1 das Maass für $+9$ und $+4$, so ist $\left.\begin{matrix}+9\\(-3)^2\end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix}+4\\(+2)^2.\end{matrix}\right.$

Aufgabe LXIX. (Fig. 49. a. b.).

Durch zwey gegebene concentrische Kreise, von einem ausserhalb desselben gegebenen Punkte A aus, eine gerade Linie AG zu legen, deren Segmente AG, GF, welche durch den zweiten Durchschnitt G mit dem grösseren Kreise und einen der Durchschnitte F mit dem kleineren gebildet werden, in dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien p, q stehen, wobey $p > q$ ist.

Analysis.

Es sey AG die gesuchte Linie, so ist, wenn der Mittelpunkt O mit dem Punkte F durch die gerade Linie OF verbunden, und GH der Linie OF parallel gezogen, auch bis zum Durchschnitte mit der, wo nöthig, verlängerten AE verlängert wird, $AH:HO = AG:GF = p:q$, mithin AH, somit der Punkt H gegeben. Da auch

$$\left.\begin{array}{l} GA : AF \\ GH : OF \end{array}\right\} = p : p - q,$$

so ist GH, somit der Punkt G gegeben.

Construction.

Man lege durch A, O die geraden Linien AP, OQ, auf einerley Seite von AO, einander parallel, mache $AP = p$, $OQ = q$, ziehe die gerade Linie PQ, verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte H mit der, wo nöthig, verlängerten AE, richte in O auf AO den Radius OU perpendikular auf, ziehe demselben die Linie HW parallel, welche von der durch A, U gezogenen geraden Linie in W geschnitten werde, beschreibe aus H, als Mittelpunkte, mit HW, als Radius, einen Kreis, welcher dem grösseren Kreise in G begegne, und ziehe die, den kleineren Kreis in F schneidende, gerade Linie AG, so ist dieselbe die verlangte.

Determination.

Wenn der Punkt F auf dem Bogen CK gesucht wird (K sey der Berührungspunkt der von A an den kleineren Kreis gezogenen Tangente), so ist

$$AG < AE, \quad AF > AC$$

$$\text{also } GA:AF < EA:AC$$

$$\text{folglich } AG:GF > AE:EC;$$

also muss das Verhältniss $p:q \geqq$ als das Verhältniss AE:EC seyn.

Wenn der Punkt F auf dem Bogen DK liegen soll,

$$\text{so ist } AG < AE, \quad GF > ED$$

$$\text{also } AG:GF < AE:ED$$

$$\text{mithin muss } p:q \leqq AE:ED \text{ seyn.}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AL < AE, \; AK > AC, \; LK > ED$$

$$\text{also } LA:AK < EA:AC, \quad \text{und } AL:LK < AE:ED.$$

$$\text{folglich } AL:LK > AE:EC.$$

$$\text{Da } p:q \geqq AE:FC, \quad p:q \leqq AE:ED \text{ ist;}$$

$$\text{so kann } \left.\begin{matrix} p:q \\ AH:HO \end{matrix}\right\} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \left\{\begin{matrix} AL:LK \\ AM:MO \end{matrix}\right. \text{ genommen werden;}$$

$$\text{also } AO:OH \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} AO:OM$$

$$\text{folglich } OH \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} OM$$

mithin kann H zwischen O und M, in M, auf die Verlängerung von OM fallen. Ist $AO:OH < AO:OM$, so

$$\text{kann } \underline{AO:OH \overset{=}{<} AO:OE} \text{ werden,}$$

$$\text{folglich } OH \overset{=}{>} OE;$$

mithin kann der Punkt H in E und auf die Verlängerung von OE fallen.

$$\text{Da } \underline{p:q \overset{=}{>} AE:EC} \text{ ist}$$

$$\text{so ist } \underline{p:p-q} \; \underline{\overset{=}{<} EA:AC}$$

$$\text{folglich } AE \overset{=}{>} \begin{cases} \frac{p}{p-q} AC \\ \frac{p}{p-q}(AO-OC) \\ \frac{p}{p-q} AO - \frac{p}{p-q} OC. \end{cases}$$

$$\text{Da } \underline{AH:HO = p:q} \text{ ist}$$

$$\text{so ist } \underline{HA:AO = p:p-q}$$

$$\text{somit } HA = \frac{p}{p-q} AO.$$

$$\text{Da } \left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} OA \\ QR \end{matrix}\right\} : AH \\ RP:PA \\ p-q:p \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} UO \\ OC \end{matrix}\right\} : HW \text{ ist, wenn } QR \# AO;$$

$$\text{so ist } HW = \frac{p}{p-q} OC$$

$$\text{folglich } \underline{AE \overset{=}{>} AH-HW}$$

$$\text{mithin } HW \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \begin{cases} HA - AE \\ HE. \end{cases}$$

$$\text{Auch ist } p:q \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} AE:ED$$

$$\text{also } p:p-q \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} EA:AD$$

$$\text{folglich } AE \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \begin{cases} \frac{p}{p-q} AD \\ \frac{p}{p-q}(AO+OD) \\ \frac{p}{p-q} AO + \frac{p}{p-q} OD \\ HA + HW \end{cases}$$

$$\text{mithin } \begin{rcases} EA - AH \\ HE \end{rcases} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} HW.$$

Ferner ist $AL:LK < AE:ED$, $AL:LK > AE:EC$,

$$\text{somit } p:q \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} AL:LK$$

$$\text{also } p:p-q \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} LA:AK$$

$$\text{folglich } LA \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{p}{p-q} AK$$

mithin für das obere Zeichen $AL - \frac{p}{p-q} AK > 0$

$$\text{somit } \begin{rcases} \left(AL - \frac{p}{p-q} AK\right)^2 \\ \left(\frac{p}{p-q} AK - AL\right)^2 \end{rcases} > 0$$

für das untere Zeichen $o < \frac{p}{p-q} AK - AL$

somit $o < \left(\frac{p}{p-q} AK - AL\right)^2$

demnach in allen Fällen $o \begin{smallmatrix} = \\ < \end{smallmatrix} \left(\frac{p}{p-q} AK - AL\right)^2$

somit $o \begin{smallmatrix} = \\ < \end{smallmatrix} \begin{cases} \frac{p^2 AK^2}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p}{p-q} LA.AK \\ \frac{p^2(AO^2 - OK^2)}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p.AO}{p-q} \frac{LA.AK}{AO} \end{cases}$

mithin $\left.\begin{matrix} \frac{p^2.OK^2}{(p-q)^2} \\ GH^2 \end{matrix}\right\} \begin{smallmatrix} = \\ < \end{smallmatrix} \begin{cases} \frac{p^2.AO^2}{(p-q)^2} + LA^2 - \frac{2p.AO}{p-q} AV \\ AH^2 + LA^2 - 2 HA.AV \\ HL^2 \end{cases}$

also $GH \begin{smallmatrix} = \\ < \end{smallmatrix} HL$;

folglich erreicht der aus H, als Mittelpunkte, beschriebene Kreis den Bogen EL.

Endlich ist $HA:AO = WH:OU$

also $AH:HW = AO:\begin{cases} OU \\ OF \end{cases}$

folglich $AG:GF = AH:HO$
$= p:q.$

Anmerkung.

Da $LA \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \frac{p}{p-q} AK$ ist, so kann auch geschlossen werden, wie folgt; es sey $o \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \frac{p}{p-q} AK - LA$

$$\text{folglich } 0 \substack{> \\ = \\ <} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p^2}{(p-q)^2} AK^2 + LA^2 - \dfrac{2p}{p-q} LA . AK \\[2ex] \dfrac{p^2(AO^2 - OK^2)}{(p-q)^2} + LA^2 \left\{ \begin{array}{l} - \dfrac{2pAO}{p-q} \, \dfrac{LA . AK}{AO} \\[2ex] - \dfrac{2p . AO}{p-q} VA \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{c} \dfrac{p^2 . OK^2}{(p-q)^2} \\ GH^2 \end{array} \right\} \substack{> \\ = \\ <} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p^2 . AO^2}{(p-q)^2} + LA^2 - \dfrac{2p}{p-q} OA . AV \\ AH^2 + LA^2 - 2\, HA . AV \\ \qquad HL^2. \end{array} \right.$$

Aber man darf nicht daraus herleiten wollen, es sey somit $GH \substack{> \\ = \\ <} HL$. Ist nämlich $LA > \dfrac{p}{p-q} AK$, und leitet man daraus her, es sey $0 > \dfrac{p}{p-q} AK - LA$, so ist das richtig, wenn die positive Einheit zum Maasse beider Glieder genommen wird. Setzt man nun zur Abkürzung $\dfrac{p}{p-q} AK - LA = -m$, so ist $1 : -m = -m : +m^2$. Ist die positive Einheit das Maass der Glieder des ersten Verhältnisses, so ist $1 > -m$, d. h. das erste Glied der Proportion grösser, als das zweite, folglich ist auch das dritte grösser, als das vierte, d. h. $-m > +m^2$. Das ist aber nur richtig, wenn die negative Einheit das Maass von $-m$, $+m^2$. Ist aber die negative Einheit das Maass von $+m^2$, oder von $\dfrac{p^2}{(p-q)^2} AK^2 + AL^2 - \dfrac{2p}{p-q} LA . AK$, so ist auch die negative Einheit das Maass von GH^2 und HL^2, wovon jenes grösser ist, als dieses, mithin ist $GH < HL$. Es ist also in allen Fällen $GH \substack{= \\ <} HL$.

Aufgabe LXX. (Fig. 50.).

Die Länge der von dem Brennpunkte F einer gegebenen Ellipse zu einem Punkte derselben gezogenen geraden Linie FM (Radius Vector genannt) zu finden.

Auflösung.

Bezeichnet man die grosse Achse AB mit a, die kleine DE mit b, den Mittelpunkt der Ellipse mit C, die Abscisse CP mit u, so ist aus bekannten Gründen

$$FP\,(=FC-CP) = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2)}-u$$

$$\text{also}\quad FP^2 = \tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+u^2$$

$$\text{folglich}\ \left.\begin{matrix}FP^2+PM^2\\ FM^2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}b^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+u^2\left\{\begin{matrix}+\dfrac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2-u^2)\\ +\tfrac{1}{4}b^2-\dfrac{b^2}{a^2}u^2\end{matrix}\right.$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2-u\sqrt{(a^2-b^2)}+\frac{a^2-b^2}{a^2}u^2$$

$$\text{mithin}\ FM = \pm\left(1/2\,a-\frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right).$$

Anmerkung 1.

Die Algebra antwortet in Vorstehendem in höchster Allgemeinheit auf die Frage, wie gross die Entfernung des gegebenen Brennpunktes F einer Ellipse, deren grosse und kleine Achse = a und b gesetzt werden, von einem Punkte, dessen Abscisse (vom Mittelpunkte gerechnet) = u gesetzt wird, sey. Indem es unentschieden bleibt, ob AB, oder A'B', wenn A'F = FA, A'B' = AB genommen wird, die Lage der grossen Achse sey, ertheilt sie die Antwort für beide Fälle durch Bestimmung der Länge der Linien FM und FM', wovon jene durch

das positive Zeichen, diese durch das negative jenes doppelten Werthes angegeben wird.

Anmerkung 2.

Sucht man den Werth von GM, so findet man in ganz ähnlicher Weise den doppelten Ausdruck GM $= \pm(\frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)})$, wovon der obere die Linie GM, der untere die ihr absolut gleiche, ihr parallel laufende, Linie M'G' bezeichnet, Linien, welche die Algebra durch die Zeichen + — zu unterscheiden pflegt.

Anmerkung 3.

Sucht man die Werthe von FM+MG, so findet man FM+MG $= \pm a$, d. h. die beiden positiven Linien FM und MG bilden eine Summe $= +a$, die ihnen entgegengesetzt liegenden FM' und M'G' eine Summe $= -a$.

Anmerkung 4.

Dass dies Alles keine müssige Unterscheidung sey, erhellet aus folgender Aufgabe.

Aufgabe LXXI. (Fig. 50.).

Die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn ein Brennpunkt der Pol ist.

Auflösung.

Bezeichnet man FM durch z, AFM durch φ, so ist

$$PF = -z.\cos.\varphi, \qquad MP = z.\sin.\varphi$$

$$\text{also } \left.\begin{matrix}CP\\u\end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix}MP^2\\z^2(\sin.\varphi)^2\\z^2(1-(\cos.\varphi)^2)\end{matrix}\right\} \begin{matrix}= \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - (\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + z.\cos.\varphi)^2)\\ \\= \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - z.\cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)} - z^2(\cos.\varphi)^2)\end{matrix}$$

$$\text{mithin } z^2 = \frac{b^2}{a^2}\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2}{a^2} z\cos.\varphi \sqrt{(a^2-b^2)} \begin{cases} + z^2(\cos.\varphi)^2\left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \\ + z^2(\cos.\varphi)^2 \dfrac{a^2-b^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\text{somit} \quad z = \pm\left(\frac{b}{a}\frac{b}{2} - z.\cos.\varphi \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)$$

$$\text{demnach} \quad z\left(1 \pm \cos.\varphi \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right) = \pm \frac{b^2}{2a}$$

$$\text{also ist} \quad z = \pm \frac{\dfrac{b^2}{2a}}{1 \pm \cos.\varphi \dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}}$$

$$= \pm \frac{\tfrac{1}{2} b^2}{a \pm \cos.\varphi \sqrt{(a^2-b^2)}} = \pm \frac{\frac{b^2}{a}}{2\left(1 \pm \cos\varphi \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\right)} = \frac{p}{2(1 \pm e\cos\varphi)} = \frac{a(1-e^2)}{(1 \pm e\cos\varphi)}$$

Es hat mithin z zwey verschiedene Werthe. Es ist entw. $z = + \dfrac{\tfrac{1}{2} b^2}{a + \cos.\varphi \sqrt{(a^2-b^2)}}$, oder $z = - \dfrac{\tfrac{1}{2} b^2}{a - \cos.\varphi \sqrt{(a^2-b^2)}}$; durch welche Werthe die Linien FM, FN angedeutet werden.

Anmerkung 1.

Dieselbe Aufgabe kann auf folgende Art aufgelöset werden.

$$\text{Es ist } \left.\begin{matrix}\text{FM} \\ z\end{matrix}\right\} = \pm\left(\tfrac{1}{2} a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}\right), \quad u = \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} b^2)} + z.\cos.\varphi$$

$$\text{also } z = \pm\left(\tfrac{1}{2} a - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} b^2)} + z.\cos.\varphi\right)\right)$$

$$= \pm\left(\tfrac{1}{2} a - \frac{\tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} b^2}{\tfrac{1}{2} a} - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} z.\cos.\varphi\right)$$

---

* Setzt man in dem Werth $z = \dfrac{a(1-e^2)}{1 \pm e\cos\varphi}$, $p = a(1-e^2)$ daraus, $a = \frac{1}{0}$; $1 = e$ [illegible] der [illegible] Parabel, so wird $z = \dfrac{p}{1 \pm e\cos\varphi}$ cf. Biot p: 203

$$\text{folglich } z\left(1 \pm \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\cos.\varphi\right) = \pm \frac{1/2\, b^2}{a}$$

$$z\,\frac{a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}.\cos\varphi}{a}$$

$$\text{mithin } z = \pm \frac{1/2\, b^2}{a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}.\cos.\varphi}.$$

Wer sich also erlaubt, nur $z = +(\frac{1}{2}a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)})$ zu setzen, und den Werth $z = -(1/2a - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-b^2)})$ z' vernachlässigen, der lauft Gefahr, die Polargleichung nur zur Hälfte anzugeben, nämlich nur zu finden $z = + \frac{1/2\, b^2}{a + \cos.\varphi \sqrt{(a^2+b^2)}}$, während der vollständige Werth von $z = \pm \frac{1/2\, b^2}{a \pm \cos.\varphi.\sqrt{(a^2-b^2)}}$ gesetzt werden muss.

Anmerkung 2.

Bezeichnet man die einem Winkel φ zugehörigen Werthe von z mit z', z'', so ist

$$z = + \frac{1/2\, b^2}{a + \cos.\varphi \sqrt{(a^2-b^2)}},\quad z'' = - \frac{1/2\, b^2}{a - \cos.\varphi\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

$$= + \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.\varphi.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}} \quad = - \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{2}a - \cos.\varphi.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}.$$

Soll die Polargleichung, statt des Winkels $AFM = \varphi$, den Winkel $BFM = \beta$ enthalten, so hat man in den Werthen von z nur $-\cos.\beta = \cos.\varphi$ zu setzen. Es wird also

$$z' = + \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{a}{2} - \cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}},\quad z'' = - \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}.$$

Wird der Winkel β um 2 R vergrössert, und bezeichnet man die dadurch bestimmten Werthe von z durch z''', z'''', so ist

$$z''' = + \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{a}{2} - \cos.(2R + \beta)\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}, \quad z'''' = - \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.(2R + \beta)\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$$

$$= + \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a + \cos.\beta\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}} \qquad = - \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}a - \cos.\beta\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}.$$

Ist z' die Bezeichnung von FM, z'' von FN, so ist z''' die Bezeichnung von FN, z'''' von FM. Und z', z'', so wie z''', z'''' liegen einander entgegengesetzt, gleichwie sie mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Bei Vergleichung von z', z'' ist $z' = FM$ die positive, $z'' = FN$ die negative Linie. Bey Vergleichung von z''', z'''' ist $z''' = FN$ die positive, $z'''' = FM$ die negative Linie.

D'Alembert giebt, in seinen Opuscules mathématiques Tom. VIII. in dem Capitel sur les quantités negatives, als die Polargleichung der Ellipse an, $z = + \frac{\frac{1}{4}b^2}{a - \cos.\beta.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$, welches nur die eine Hälfte derselben ist, findet obige Werthe von z' und z''', und behauptet, weil beide mit dem Zeichen + behaftet sind, dass zuweilen zwey mit dem Zeichen + behaftete Linien von einem Punkte aus in gerade entgegengesetzter Richtung lägen. Hätte er die andere Hälfte der Polargleichung gleichfalls gekannt, so würde er, wenn er z'' und z'''' gesucht hätte, mit demselben Rechte haben behaupten können, dass zwey mit dem Zeichen — behaftete Linien von einem Punkte aus zuweilen in gerade entgegengesetzter Richtung lägen, und dass, wenn er z' und z'''', z'' und z''' verglichen hätte, zwey Linien, welche mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind, von einem Punkte aus in einerley Richtung liegen könnten.

Aus dem oben Angeführten erhellet, dass der Grundfehler bey D'Alembert in der unvollkommenen Angabe der Polargleichung, und der daran geknüpften Vergleichung derjenigen Werthe von z liegt, welche verschiedenen Winkeln zugehören, während die Algebra nur diejenigen in Vergleichung zu bringen erlaubt, welche durch denselben Winkel bestimmt werden. Sie leihet $z'' = FN$ das Zeichen —, weil sie $z' = FM$ das Zeichen + vorsetzt. Sie versieht $z'''' = FM$ mit dem Zeichen —, weil sie $z''' = FN$ das Zeichen + vorsetzt.

Und so kann dasjenige, was D'Alembert in jenem Capitel zum Beweise seiner Behauptungen von der Polargleichung der Ellipse, und eben so von der der Hyperbel hernimmt, nur zur Bestätigung der den seinigen gerade entgegengesetzten Behauptungen dienen.

Aufgabe LXXII. (Fig. 51.).

Den analytischen Ausdruck für das von einem gegebenen Punkte O auf die gegebene gerade Linie BQ gefällte Perpendikel OQ zu finden.

Auflösung.

Es sey die Gleichung für die Linie BQ, wenn man die Abscissen von A an auf der geraden Linie AP, die Ordinaten rechtwinkelig nimmt, und den Winkel $QBP = \beta$ setzt, $y = x.\tan.\beta + b$

$= ax + b$, wenn $\tan.\beta = a$ genommen wird;

so ist, wenn man OP durch y' bezeichnet,

$$OM = y' - y$$
$$= y' - ax - b$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{also } OM.\cos.\beta \\ OQ\end{array}\right\} = (y'-ax-b)\cos.\beta$$

$$= \frac{y'-ax-b}{\sec.\beta}$$

$$= \pm\frac{y'-ax-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

$$\text{folglich } OQ^2 = \frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}.$$

Zusatz.

Macht man NO = OM, so ist $MN = 2(y'-ax-b)$. Zieht man NC ⧣ BQ, so ist die Gleichung für CN, wenn die Ordinaten mit y'' bezeichnet werden, und die Abscissen dieselben bleiben, wie vorhin,

$$y'' = ax+b+2(y'-ax-b)$$
$$= 2y'-ax-b;$$

und es wird, wenn man das Perpendikel OR auf CN fällt, $OR (= ON.\cos.N) = (2y'-ax-b-y')\cos.\beta$

$$= \frac{y'-ax-b}{\sec.\beta}$$

$$= \pm\frac{y'-ax-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

$$\text{folglich } OR^2 = \frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}.$$

Der Ausdruck $\frac{(y'-ax-b)^2}{1+a^2}$ enthält also sowohl den Werth von OQ^2, als den von OR^2. Die Quadratwurzel aus demselben muss demnach sowohl den Werth von OQ, als den von OR ausdrücken. Das geschieht durch die Zeichen $\pm$, gleichwie die Geometrie diese Linien einander in entgegengesetzte Richtung legt.

Aufgabe LXXIII.

Die Gleichung $a^{2n}+x^{2n}$ in einfache Factoren von der Form $x = p(\cos.\varphi \pm \sin.\varphi.\sqrt{-1})$ zu verwandeln.

Auflösung.

Es sey $x = p(\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1})$, so ist sowohl

$a^{2n} + p^{2n}(\cos.\varphi + \sin.\varphi.\sqrt{-1})^{2n} = 0$, als

$a^{2n} + p^{2n}(\cos.\varphi - \sin.\varphi.\sqrt{-1})^{2n} = 0$

also $a^{2n} + p^{2n}(\cos.2n\varphi + \sin.2n\varphi.\sqrt{-1}) = 0$,

und $a^{2n} + p^{2n}(\cos.2n\varphi - \sin.2n\varphi.\sqrt{-1}) = 0$

folglich $2a^{2n} + 2p^{2n}\cos.2n\varphi = 0$,

und $2p^{2n}\sin.2n\varphi\sqrt{(-1)} = 0$

mithin $\sin.2n\varphi = 0$, weil $p^{2n} = 0$ gesetzt, auch $a^{2n} = 0$, also $a = 0$ geben würde, welches gegen die Voraussetzung ist;

demnach $\cos.2n\varphi = \pm 1$

somit $a^{2n} \pm p^{2n} = 0$

also $a^{2n} = \mp p^{2n}$

folglich $a^{2n} = \pm p\sqrt{\mp 1}$.

Für $a^{2n} = \pm p\sqrt{-1}$ würde a^{2n} imaginär, welches gegen die Voraussetzung ist, mithin ist $a^{2n} = \pm p\sqrt{+1}$,

somit $a = \pm p$, und $\cos.2n\varphi = -1$

demnach $p = \mp a$ und $2n\varphi = (2m+1)\pi$

also $\varphi = \dfrac{2m+1}{2n}\pi$.

A.) Es sey $p = -a$, so ist der allgemeine Ausdruck eines Paares von Wurzeln $x = -a(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}.\pi\sqrt{-1})$, und die allgemeine Form eines quadratischen Factors $=$

$$(x + a\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1})(x + a\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi - a.\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$$

$$= x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi)^2 + a^2(\sin.\frac{2m+1}{2n}\pi)^2$$

$$= x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2.$$

Mithin enthält $a^{2n} + x^{2n}$ die Factoren

$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots.$$
$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)\ldots.(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n+2m+1}{2n}\pi + a^2)\ldots.$$

Es ist aber
$$\cos.\frac{2n+2m+1}{2n}\pi = \cos.(\pi + \frac{2m+1}{2n}\pi)$$
$$= \cos.(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi)$$
$$= \cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi$$

---

demn. $x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi + a^2.$

Es sind also die auf den Factor $x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2$ folgenden Factoren mit diesem, oder den vorhergehenden identisch, und die von einander verschiedenen Factoren stellen sich durch das Produkt

$$(x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots.(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)$$

dar, in welchem die Anzahl der Factoren $= n$, die An-

zahl der zum Grunde liegenden einfachen Factoren aber $= 2n$ ist, so dass $a^{2n} + x^{2n} = (x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)(x^2 + 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2)\ldots(x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2)$ ist.

Zusatz.

Die einfachen Factoren des letzten Factors sind $x = -a(\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$. Nun ist

$$\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi = \cos.(\pi - \frac{1}{2n}\pi)$$
$$= -\cos.\frac{1}{2n}\pi;$$
$$\sin.\frac{2n-1}{2n}\pi = \sin.(\pi - \frac{1}{2n}\pi)$$
$$= \sin.\frac{1}{2n}\pi;$$

---

also $-a(\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-1}{2n}\pi\sqrt{-1}) = -a(-\cos\frac{1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{1}{2n}\pi\sqrt{-1})$

$$= a(\cos.\frac{1}{2n}\pi \mp \sin.\frac{1}{2n}\pi.\sqrt{-1}).$$

Die einfachen Factoren des ersten Factors $x^2 + 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2$ sind $x = -a(\cos.\frac{1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{1}{2n}\pi.\sqrt{-1})$, folglich sind die einfachen Factoren des letzten Factors den einfachen Factoren des ersten mit entgegengesetzten Zeichen gleich.

Allgemein sind die Factoren des Factors $x^2 + 2ax\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi + a^2$ in folgendem Ausdrucke enthalten,

$$x = -a(\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi.\sqrt{-1}).$$

Die Factoren des Factors $x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2$ sind

$$x = -a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right).$$

Es ist aber $\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = \cos.\left(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi\right)$

$$= -\cos.\frac{2m+1}{2n}.\pi;$$

$$\sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = \sin.\left(\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi\right)$$

$$= \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi;$$

---

mithin $-a\left(\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$

$$= -a\left(-\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$$

$$= a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \mp \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right);$$

demnach sind die einfachen Factoren zweyer Factoren, welche vom ersten und letzten gleich weit abstehen, einander absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen.

Ist die Anzahl der quadratischen Factoren ungerade, so ist der mittlere $= a^2 + 2ax\cos.\frac{n}{2n}\pi + x^2$

$$= a^2 + 2ax\cos.{}^1/_2\pi + x^2$$

$$= a^2 + x^2;$$

mithin sind die einfachen Factoren desselben einander absolut gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen. Man braucht also nnr die einfachen Factoren der ersten, oder der zweiten Hälfte zu suchen, und dieselben mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen, um sie alle zu erhalten.

B. Es sey $p = +a$. Der allgemeine Ausdruck eines Paares einfacher Factoren ist

$$x = a\left(\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi \pm \sin.\frac{2m+1}{2n}\pi.\sqrt{-1}\right)$$

und eines quadratischen Factors

$$= x^2 - 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2, \quad \text{und}$$

$$a^{2n} + x^{2n} = (x^2 - 2ax\cos.\frac{1}{2n}\pi + a^2)(x^2 - 2ax.\cos.\frac{3}{2n}\pi + a^2)$$

$$(x^2 - 2ax\cos.\frac{5}{2n}\pi + a^2) \ldots (x^2 - 2ax\cos.\frac{2n-1}{2n}\pi + a^2).$$

Es ist aber $\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi = (\cos.\pi - \frac{2m+1}{2n}\pi)$

$$= -\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi$$

also ist $x^2 - 2ax\cos.\frac{2n-(2m+1)}{2n}\pi + a^2 = x^2 + 2ax\cos.\frac{2m+1}{2n}\pi + a^2$;
mithin erhält man für den Fall $p = +a$ dieselben Factoren, wie oben, wenn $p = -a$ gesetzt wird.

Aufgabe LXXIV. (Fig. 52.).

Den Krümmungshalbmesser einer krummen Linie, deren Gleichung $y = Fx$ gegeben ist, in einem gegebenen Punkte (x, y) zu finden.

Auflösung.

Die Gleichung des Krümmungskreises sey

$$(y'-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \gamma^2,$$

so ist $2(y'-\beta)\frac{dy'}{dx} + 2(x-\alpha) = 0$

folglich $(y'-\beta)\frac{dy'}{dx} + x - \alpha = 0$

mithin $(y'-\beta)\frac{d^2y'}{(dx)^2} + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

Da der Kreis durch den Punkt (x, y) gehen soll, und die ersten und zweiten Differentialquotienten des Krümmungskreises und der Curve einander gleich werden sollen, so ist

$$(y-\beta)\frac{d^2 y}{(dx^2)}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,\quad (y-\beta)\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0,\quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$$

---

somit $$y-\beta = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}},\quad \alpha-x=(y-\beta)\frac{dy}{dx}$$

---

demnach $$\alpha-x=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}}\,\frac{dy}{dx}$$

---

also $$\left.\begin{array}{l} \left(-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}}\right)^2+\left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ \left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}}\right)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \\ \frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^3}{\left(\frac{d^2 y}{(dx)^2}\right)^2} \end{array}\right\}=\gamma^2$$

---

folglich $$\gamma=\pm\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{(dx)^2}}.$$

Zusatz 1.

Es hat der Krümmungshalbmesser zwey einander absolut gleiche, mit entgegengesetzten Zeichen versehene, Werthe.

Zusatz 2.

Die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte ist

$$y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2$$

$$\text{also } 2ydy = pdx - \frac{p}{a} xdx$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \frac{p - \frac{p}{a} x}{2y}$$

$$\text{mithin } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p - \frac{p}{a} x}{2y}\right)^2$$

$$= \frac{4y^2 + p^2 - 2\frac{p^2}{a} x + \frac{p^2}{a^2} x^2}{4y^2}$$

$$= \frac{4y^2 + p^2 - 2\frac{p}{a}\left(px - \frac{p}{2a} x^2\right)}{4y^2}$$

$$= \frac{y^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{p}{2a} y^2}{y^2}$$

$$= y^2 \frac{\left(1 - \frac{p}{2a}\right) + \frac{1}{4} p^2}{y^2}$$

$$\text{und } \frac{d^2 y}{(dx)^2} = \frac{-2\frac{p}{a}y - 2(p-\frac{p}{a}x)\frac{dy}{dx}}{4y^2}$$

$$= -\frac{\frac{p}{a}y + (p-\frac{p}{a}x)^2 \frac{1}{2y}}{2y^2}$$

$$= -\frac{2\frac{p}{a}y^2 + (p-\frac{p}{a}x)^2}{4y^3}$$

$$= -\frac{2\frac{p}{a}(px-\frac{p}{2a}x^2) + p^2 - 2\frac{p^2}{a}x + \frac{p^2}{a^2}x^2}{4y^3}$$

$$= -\frac{p^2}{4y^3};$$

$$\text{demnach ist } \gamma = \pm \frac{(y^2(1-\frac{p}{2a}) + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4}p^2}$$

$$= \mp \frac{(y^2(1-\frac{p}{2a}) + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}.$$

Ist die Gleichung eines anderen Kegelschnittes $y'^2 = p'u - \frac{p'}{2a'}u^2$, und bezeichnet γ' den Krümmungshalbmesser für den Punkt u', y', so ist $\gamma'^2 = \frac{(y'^2(1-\frac{p'}{2a'}) + \frac{1}{4}p'^2)^3}{(\frac{1}{4}p'^2)^2}$.

Ist nun $u = -x$, $p' = -p$, $a' = -a$, so ist

$$y'^2 = (-p)(-x) - \frac{-p}{-2a}(-x)^2$$

$$= px - \frac{p}{2a}x^2;$$

also ist $y = y'$, und $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ zugleich die Gleichung des zweiten Kegelschnittes. Auch ist

$$y'^2 = \frac{\left(y^2\left(1-\frac{-p}{-2a}\right)+\frac{1}{4}(-p)^2\right)^3}{\left(\frac{1}{4}(-p)^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(y^2\left(1-\frac{p}{2a}\right)+\frac{1}{4}p^2\right)^3}{\frac{1}{4}p^2};$$

mithin ist der Ausdruck für γ^2 identisch mit dem für γ'^2. Werden durch obige Gleichungen Ellipsen bezeichnet, so ist, weil die Geometrie die von der Algebra mit dem Zeichen — versehenen Linien durch den Gegensatz der Lage unterscheidet, die Gleichung $y'^2 = p'u - \frac{p'}{2a'} u^2$ die Gleichung für die über AB' als Hauptachse beschriebene Ellipse, wenn die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2$ die Gleichung für die über AB beschriebene ist. Die Krümmnngshalbmesser $MR = \gamma$, $M'R' = \gamma'$, welche zu den Punkten M, M' gehören, deren Coordinaten x, y und u, y' einander gleich sind, gehören, liegen auf verschiede[ne]n Seiten der geraden Linie MM', und sind einander paral[lel, un]d werden desshalb algebraisch durch die Zeic[hen + und] — unterschieden.

Zusatz ?

In derselben Weise lässt sich z[eigen, das]s jede Gleichung für eine Curve die Gleichung für [e]ine zweite jener congruente Curve ist, deren Abscissen [ei]ne den Abscissen der ersten entgegengegetzte Lage haben, und deren Gleichung aus der Gleichung für jene erhalten wird, wenn alle Coëfficienten solche Zeichenänderung erleiden, dass die Zeichen aller Glieder der Gleichung unverändert bleiben.

Mit 3 Steintafeln.

Tab: I.

Fig: 6.

Fig: 8.

Fig: 9.

Fig: 11.

Fig: 13.

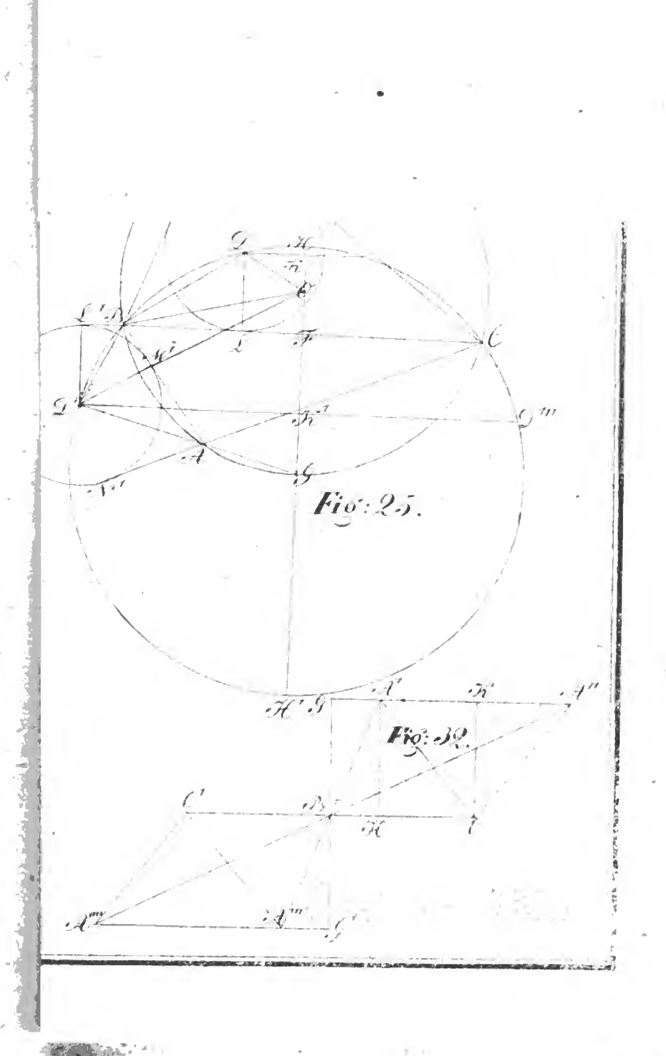
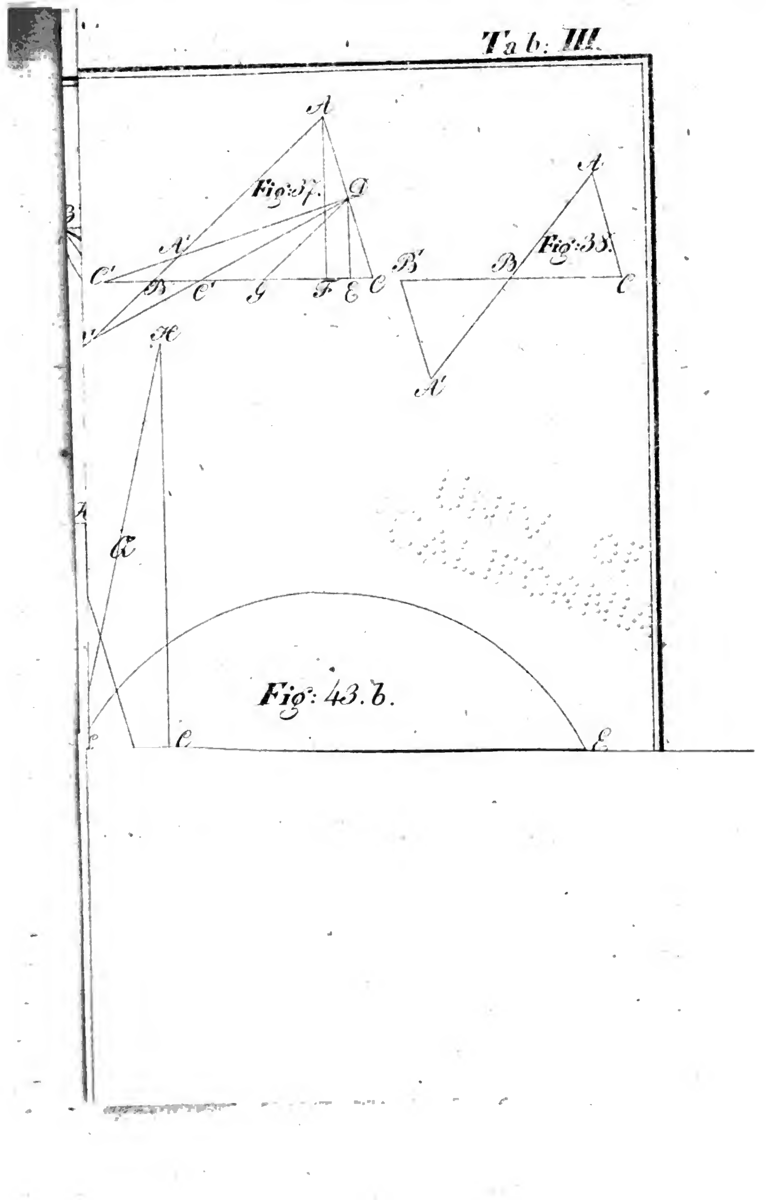


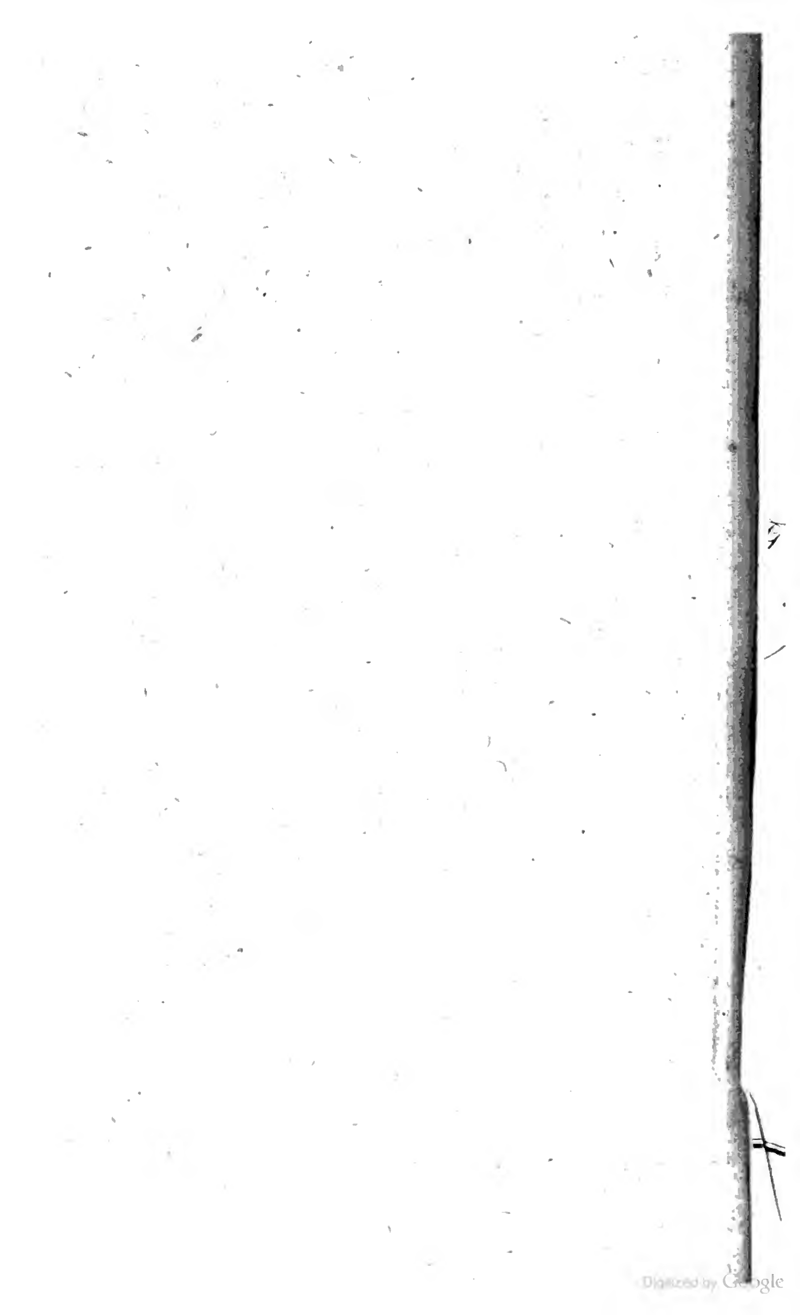
Fig: 25.

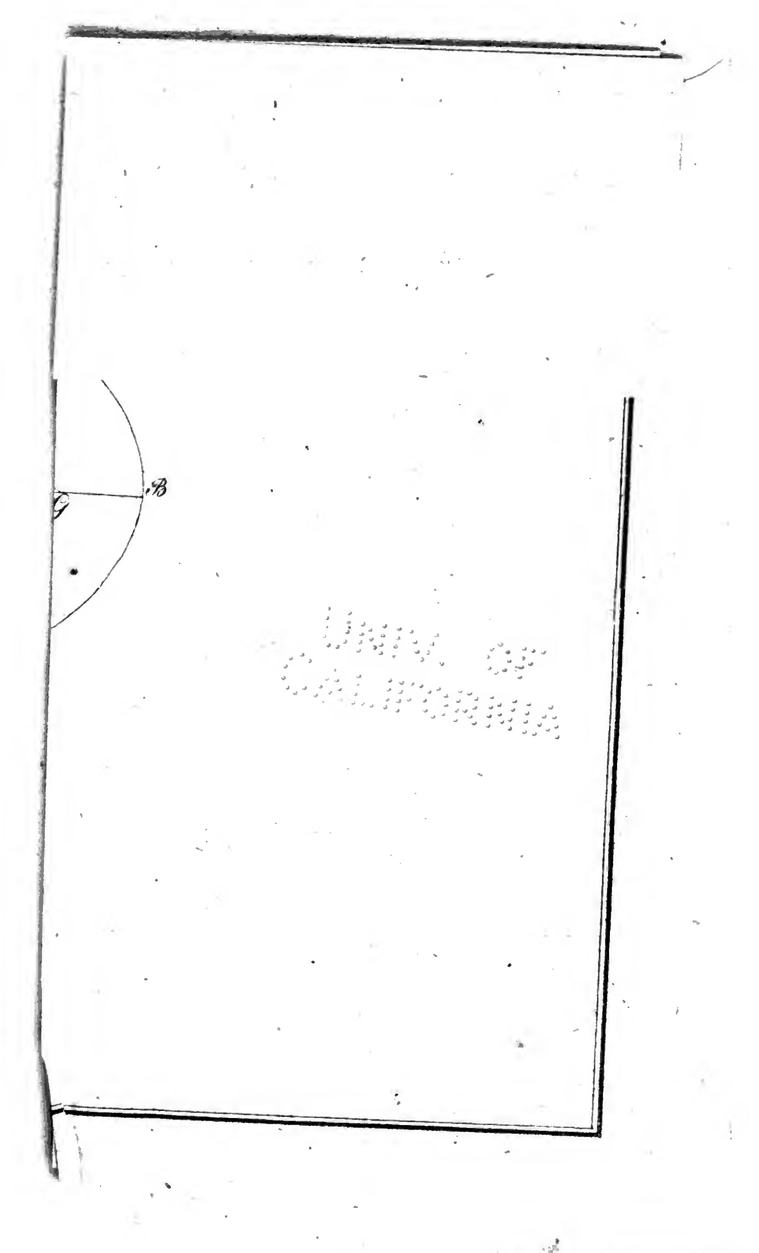
Fig: 32.



Tab: III.






B
G



Sammlung

neuer

mathematischer Aufgaben.

Von

A. von Forstner,

Lieutenant im zweiten Garde-Regiment und Lehrer der Mathematik
bei der Grenadier-Divisions-Schule.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin, 1819.

Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Vorwort.

Bei den schätzbaren Sammlungen mathematischer Aufgaben, die wir bereits besitzen, mogte es überflüssig scheinen, dieselben noch zu vermehren; aber die Anzahl dieser Sammlungen ist eben nicht so groß, und ihr Inhalt nicht so erschöpfend, daß nicht jeder Beitrag erwünscht seyn sollte, um so mehr, da fast eine jede *neue Sammlung* die Aufgaben früherer Sammlungen, durch mehr oder minder neue Aufgaben vermehrt enthält, und hierdurch den Lösern und Freunden mathematischer Aufgaben, nicht nur oft Zeit und Lust genommen wird, die nicht selten nur spärlich vertheilten neuen aufzusuchen, sondern sie müssen auch die Aufgaben immer von neuem anschaffen; die sie

vielleicht schon mehr als ein Mal besitzen, wodurch die Anschaffung derselben sehr kostspielig wird, was schon bei mathematischen Werken, des schwierigen Satzes und der Kupfertafeln wegen, nicht anders seyn kann. Von diesem Vorwnrfe sollte nun allerdings eine Sammlung neuer Aufgaben frei seyn. Aber in wie fern sind gegenwärtige Aufgaben neu zu nennen? Die überaus mannigfaltige Behandlung und Anwendung der Mathematik, macht es allerdings schwer, noch neue unbekannte Aufgaben zu finden, und doch ist meines Wissens noch keine wesentliche der folgenden Aufgaben, in bekannten Sammlungen vorhanden, wenigstens habe ich mehrere derselben hierüber nachgeschlagen *), bin aber weit entfernt von dem Glauben, als kenne ich alle vorhandene Sammlungen. Die Neuheit meiner Anfgaben, kann sich ferner wohl nur auf die erste, vierte und fünfte Abtheilung beziehen, da der Form nach die Aufgaben der zweiten und dritten Abtheilung wohl schon in Sammlungen enthalten sind, ja in mathematischen Werken enthalten seyn müssen; aber vorliegende Beispiele sind sämmtlich neu. Es scheint mir nöthig, mich hierüber näher zu erklären. Zuerst habe ich

*) Zu spät um eine Aenderung ohne große Mühe zu veranlassen fand ich, daß meine zweite geometrische Aufgabe, die Aufgabe des 77sten Paragraphs der vortrefflichen geometrischen Aufgabe von Meyer Hirsch, ist.

einige hier und da gemachte Gleichungen gesammelt, und stelle sie hier in eine Ordnung zusammen, die allerdings auffallen muß, denn Gleichungen von verschiedenen Graden, bald mit einer bald mit mehreren unbekannten Größen, oft leichtere Aufgaben den schwereren folgend, zusammenzustellen, scheint mehr als unsystematisch, — und doch hat es seinen Grund, indem ich glaube, daß es schwerer ist eine Aufgabe zu lösen, wenn man vorher nicht weiß zu welcher Klasse sie gehört, sondern dies selbst erst suchen muß, als im entgegengesetzten Falle; dann ist es mir oft vorgekommen, daß selbst geübte Löser, bei Aufgaben lange Zeit zubrachten, aus dem Grunde — weil sie ihnen zu leicht waren, sie suchten den Grund tief und er lag ganz nahe; diesem zu begegnen folgen, doch nur selten, leichtere Aufgaben den schwereren. Wer die quadratischen Gleichungen noch nicht zu lösen versteht, wird sie bei dem Ansatze bald herausfinden, und kann sie ja übergehen. Daß ich die Auflösungen nicht beigefügt habe, bedarf wohl keiner Entschuldigung, sie hätten das Werkchen unnütz vermehrt, und schaden manchem Löser nur, der sich zu früh bei ihnen Rath holt. Die Resultate stehen darin nicht gleich bei der Aufgabe, sondern folgen zusammen der letzten, um auch hier der gerechten Klage der Löser zuvor zu kommen, unwillkührlich dieselben zu lesen, und so die Ueberraschung zu verlieren, die das Lösen der Gleichungen, fast vor allen arithme-

tischen und algebraischen Aufgaben zum voraus hat, indem die Aufgabe fast immer einem Räthsel gleicht, dessen Auflösung dem Geübten nicht fehlen kann. Vielleicht habe ich den Reiz für die Auflösung der Gleichungen dadurch erhöht, daß ich auch solche machte, deren Resultat ein bekannter Name ist, was offenbar überraschender wird, als eine Zahl u. dgl. m. zu entwickeln; wie dies zu verstehen ist, sagt die Anmerkung vor der ersten Aufgabe; doch dürften sie nur mit anderen Gleichungen untermischt seyn, da man wohl nicht genug, bei mathematischen Aufgaben die Eintönigkeit vermeiden müßte.

Den Gleichungen folgen trigonometrische Aufgaben, und diesen, Aufgaben aus der Kreisberechnung. Sie mögen mehr zu einer Sammlung von Beispielen dienen, als daß in ihnen neue Methoden zur Auflösung dieser Rechnungarten enthalten wären; für Abwechselung glaube ich hierbei gesorgt zu haben, und nicht zu viel zu sagen, daß jeder der diese Aufgaben gelöset hat, eine hinlängliche Kenntniß über die verschiedenen Bedingungen bei einfachen Triangeln sich erworben hat, und in vorkommenden Fällen auch, nicht zu sehr zusammengesetzte Verbindungen von Triangeln, wird zu behandeln verstehen; den geübten Trigonometer können und sollen diese Aufgaben auch noch nicht bilden.

Die Aufgaben aus der Kreisberechnung enthalten gleich eine Anwendung der Trigonometrie, in der

Entwickelung der Segmente. Die Bedingungen sind hier so mannigfaltig wie möglich gewählte, enthalten aber dennoch nicht alle mögliche Fälle. Bei diesen Aufgaben aber, hielt ich eine Hülfe für nöthig, nämlich das Bilden der Proportionen und Andeutung der, vor Behandlung derselben oft noch erst zu entwickelnden Größen, ja bei einigen Aufgaben war wohl eine noch bedeutendere Hülfe nicht überflüssig. In wiefern diese Aufgaben auch für denjenigen brauchbar sind, der die Kenntniß der Trigonometrie entbehrt, habe ich in der Einleitung zu diesen Aufgaben gesagt, ließ sie aber dennoch, für die Trigonometer, den trigonometrischen Aufgaben folgen.

Die vierte Abtheilung enthält die analytischen Aufgaben, sich größtentheils auf die regulären Polygone beziehend, und ich glaube, daß mehrere Betrachtungen über dieselben, wie ich sie hier anstelle, nicht unwillkommen sind. Es ist offenbar interessant, die verschiedenen Verhältnisse der Perimeter dieser Figuren mit der Peripherie, der Flächen mit dem Kreise, die Näherungen jener zu diesen u. s. w. zu betrachten.

Ob ich Recht habe zu behaupten, daß Anfänger größtentheils, über den Zusammenhang der Perimeter der Figuren und der Flächen derselben, sich irrige Begriffe zu machen geneigt sind, oft wohl wähnen, mit einer Linie nur eine Fläche begrenzen zu

können, und ob nicht dieser Irrthum vielleicht einen psychologischen Grund hat, — überlasse ich Lehrern und Kennern zu beurtheilen; daß ich vorzüglich diesem zu entgegnen immer hindeute, wird unverkennbar seyn. Der Zusatz nach der dritten Aufgabe ist vorzüglich hierauf berechnet, dürfte aber wohl hier nur historisch angeführt werden; etwas vollkommen Genügendes hierüber, vermisse ich selbst in den besten mathematischen Schriften, und vielleicht könnte der Gegenstand, eines eigenen Werkes Stoff werden. Die Entwickelung des Verhältnisses der Peripherie des Zirkels zu seinem Durchmesser, wie ich sie hier durch die Trigonometrie gebe, mögte wohl neu seyn; doch Kenner sind vielleicht hierüber unterrichteter als ich, und ihrem Urtheil unterwerfe ich das meinige auch, wenn ich nämlich glaube, dem Schüler den Vortrag der Kreisberechnung nach Erlernung der Trigonometrie zu erleichtern, da dies doch auch vor derselben geschehen kann, wenn auch auf mühsamerem Wege; den Vortheil der leichteren Berechnung der Segmente und andere Vortheile zu geschweigen. — Daß weder die Peripherie des Kreises die mittlere Proportionallinie zwischen den Perimetern gleichnamiger regulären Polygone in und um den Kreis, noch der Kreis selbst die mittlere Proportionalfläche zwischen den Flächen jener beiden Polygone ist, was Anfänger so gern anzunehmen gesonnen sind, habe ich auch gezeigt. —

Endlich sind noch einige geometrische Aufgaben, größtentheils die Construction beim Kreise betreffend, hinzugefügt. Mein Augenmerk richtete ich hierbei vorzüglich auf deren analytische Lösung (fügte aber die synthetischen Beweise größtentheils auch hinzu), in der festen Ueberzeugung, daß die Quantität der gelöseten Aufgaben, weniger den geübten Löser machen, als die vielseitige Behandlung einer Aufgabe, Erwägung der möglichen und unmöglichen Fälle u. s. w.; ob aber die Qualität der hier gegebenen Aufgaben dieser Behauptung entspricht, ist kein Urtheil für mich. Näher mich über den synthetischen und analytischen Weg einzulassen, war hier nicht der Ort. — Die Anmerkung zur neunten Aufgabe wird mir nicht übel gedeutet werden, wenn ich eine Gelegenheit wahrnahm, die Anwendung einer einfachen Aufgabe auf die erhabensten Gegenstände der Größeulehre zu machen.

Zum Schluß dieser Worte, bitte ich Kenner der Mathematik, denen vielleicht diese Zeilen zu Gesicht kommen sollten, und die sie ihrer Betrachtung werth halten, um ihre Ansichten, wo sie mit den meinigen vielleicht abweichen, so wie eine Berichtigung, wenn ich Aufgaben für neu hielt, die sich vielleicht in Sammlungen schon finden, oder wenn irgendwo Rechenfehler entdeckt werden sollten; es würde Thorheit seyn, in oft seitenlangen Rechnun-

gen, sich von ihrem Einflusse ganz frei sprechen zu wollen. —

Daß diese Zeilen für Anfänger und Freunde der Mathematik, und nicht für ausgeübte Löser (in so fern dies überhaupt möglich wäre) geschrieben wurden, bedarf keiner weitern Anzeige, und sollten sie hie und da Nutzen stiften, so bleibt mir nichts zu wünschen übrig.

Berlin, am 4ten im Februar 1819.

v. Forstner.

Inhalt.

Berichtigung.

Seite 64, Zeile 15 v. u., statt: sieht, lies: sucht.

I. Gleichungen.

Gleichungen vom ersten und zweiten Grade, mit einer und mehreren unbekannten Größen. (Die Resultate stehen nach der funfzigsten Aufgabe.)

Anmerkung. Mehrere der nachfolgenden Gleichungen verlangen einen Namen zu berechnen; dies ist so zu verstehen: man schreibe das Alphabet, und bezeichne jeden Buchstaben mit der Ziffer, die seine Ordnung im Alphabete mit sich bringt; das Resultat der Gleichung bringt nun die Zahlen der einzelnen Buchstaben, durch deren Zusammensetzung der Name entsteht. Es ergiebt sich hier sogleich, ob man richtig gerechnet hat, da wohl so leicht durch eine unrichtige Rechnung kein möglicher Name entstehen kann.

1.

Zwei Läufer laufen nach einem Ziel. Als A. $\frac{4}{5}$ der Rennweite zurückgelegt hatte, war B. nur noch $\frac{1}{10}$ derselben vom Ziele entfernt. Die durchlaufenen Räume beider zusammen, überstiegen die Länge der Rennbahn um 350 Fuß. — Wie lang war die Bahn?

2.

Es zapft jemand von einem Fasse mit Wein eines Tages den sechsten Theil ab, am folgenden Tage vom Reste

wieder den fünften Theil. Jetzt gießt er 8 Quart Wasser hinzu, wodurch das Faß wieder gefüllt wird. — Wie viel Quart konnte es fassen?

3.

Eines Thiers Namen bilden die vier ersten Buchstaben einer Zahl, welche so bestimmt wird: wenn man von ihrer Hälfte 20 abzieht, so ist der Rest so viel, wie der Quotient den man erhält, wenn man von der zu suchenden Zahl 10 abzieht und den Rest durch 3 dividirt. — Welche Zahl ist dies, und wie heißt das Thier?

Anmerk. Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf die vor der ersten Aufgabe gegebenen Nachricht.

4.

In einer Gesellschaft sind noch einmal so viel Männer als Frauen, und dreimal so viel Kinder als Frauen. Die Quadratzahlen der Männer-, Frauen- und Kinderzahl addirt, geben 1400. — Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es?

5.

A. sagte: ich habe noch einmal so viel Vermögen als Schulden; B. sagte: ich habe fünfmal so viel Schulden als Vermögen; meine Schulden nebst Vermögen betragen zusammen so viel als deine Schulden, unsere beiderseitigen Schulden nebst Vermögen machen 48000 Rthl. — Wie viel Schulden und Vermögen hatte jeder?

6.

Der Werth einer Dose und eines Ringes beträgt zusammen 2000 Rthl. — Wenn man zu des Ringes Werth 400 Rthl. hinzuthut, so ist dies der Dose Werth. — Was ist Ring und Dose am Werthe?

7.

Es will jemand einen Wagen, Pferde und Zubehör anschaffen. Er soll für alles zusammen 1500 Rthl. geben;

für den Wagen nebst Zubehör werden 900 Rthl. gefordert; der Werth des Zubehörs vom Preise des Wagens nebst der Pferde hinweggenommen, läßt 1300 Rthl. — Was sollte jedes für sich kosten?

8.

Der Name eines Mannes besteht aus vier Buchstaben, welche auf folgende Art bestimmt werden: der Erste ist gleich dem vierten und noch 14 mehr, der Zweite ist gleich dem Ersten weniger 10, der Dritte ist gleich der Hälfte von der Summe des Ersten und Vierten. — Ueberdies ist die Summe der beiden letzten Zahlen gleich der Ersten + 3. — Wie heißen die Zahlen und wie ist der Name?

9.

Ein Schüler fragte den Lehrer nach dem Alter des Königs. Viermal so alt als der Kronprinz, war die Antwort; wenn man aber des Sohnes Alter mit sich selbst multiplizirt und des Vaters Alter hierzu addirt, so erhält man die Zahl 192. — Wie alt war jeder?

10.

Ein Vater ist viermal so alt als seine Tochter, die Mutter nur dreimal so alt als dieselbe; aller Jahre betragen zusammen 96. — Wie alt ist der Vater, die Mutter und die Tochter, und nach wie vielen Jahren wird der Vater nur noch einmal so alt seyn als die Tochter?

11.

Einer Stadt Name besteht aus 4 Buchstaben. Der Erste ist der doppelte Letzte weniger 4, der Zweite ist der doppelte Dritte weniger 1, die Summe der beiden Letzten gleich 18, und die Summe des Ersten und Dritten gleich 27. — Wie heißen die Zahlen und die Stadt?

12.

Welcher Name besteht aus vier Buchstaben, die so bestimmt werden: der Zweite gleich der Summe der übrigen

Buchstaben und noch 3 mehr; der Erste ist die Hälfte des Dritten, der Dritte ist gleich dem Vierten weniger 1. Auch kann man den Letzten erhalten, wenn man den Zweiten durch den Ersten dividirt, und vom Quotienten 2 subtrahirt? —

13.

Es wirft jemand mit einer Anzahl Würfeln in drei Malen 44 Augen; das erste Mal 9 Augen mehr das zweite Mal 5 mehr und das dritte Mal 18 mehr, als es der Würfel waren. — Wie viele Würfel waren es?

14.

Es kauft jemand eine Anzahl Stücke Tuch, und zwar noch $\frac{1}{2}$ mal mehr schwarzes als rothes, noch einmal so viel blaues als rothes und zweimal so viel weißes als rothes. Wenn man die Anzahl der weißen und rothen mit einander multiplizirt, so ist das Produkt 2 mehr als die Summe aller Stücke. — Wie viele Stücke waren es von jeder Sorte?

15.

Vier Buchstaben bilden den Namen einer Stadt. Sie werden so bestimmt: der Zweite ist 2 mehr als der Erste, der Dritte ist der 17te Theil des Zweiten, der Letzte ist 10 weniger als der Zweite. Multiplizirt man aber die Summe der beiden ersten Buchstaben mit dem Letzten, so ist die Zahl 224 das Produkt. — Die Zahlen und den Namen zu finden.

16.

Ein Vater ist so alt wie sein Sohn und seine Tochter zusammen. Der Tochter Alter verhält sich zum Alter des Sohnes wie 7 : 8; es ist ferner das Alter des Vaters und der Tochter zusammen 88 Jahre. — Wie alt ist jeder?

17.

Wie heißt die Stadt, deren Namen aus fünf, auf folgende Art bestimmten Buchstaben besteht: der Erste ist 2

weniger als der Dritte, der Zweite ist der 17te Theil von der Summe des Ersten und der Zahl 2, der Vierte ist die Hälfte des Dritten plus 1, der Vierte ist aber auch die Hälfte des Fünften. Ueberdies ist die Summe der beiden ersten Buchstaben 1 weniger als der Dritte. — Die Zahlen sind, und die Stadt heißt?

18.

Man soll bestimmen in wie viel Zeit 3 Röhren ein Gefäß füllen, sobald sie zusammenlaufen, wenn die erste Röhre um es allein zu füllen 48 Stunden, die zweite 20 Stunden und die dritte 25 Stunden gebrauchen. —

19.

Vor 8 Tagen ist ein Bote nach einem 440 Meilen entfernten Ort abgeschickt und macht täglich 12 Meilen; er soll, ehe er den Ort erreicht, durch einen zweiten Boten eingeholt werden, der täglich 16 Meilen macht. — Bei der wievielten Meile vom Ausgangsorte aus, wird er den Ersten einholen?

20.

In einer Stadt sind achtmal mehr Einwohner als Häuser; wenn man aber von der Quadratzahl der Gebäude die Anzahl der Einwohner abzieht, so ist der Rest 9200. — Wie viele Häuser und wie viele Einwohner hat die Stadt?

21.

In einer Gesellschaft wird zu einer Unterstützung Geld gesammelt. Nun giebt die Hälfte der Gesellschaft, jeder so viele Thaler als die Hälfte der ganzen Gesellschaft Personen hat; vom vierten Theile der ganzen Gesellschaft giebt jeder so viel Thaler als Personen in der ganzen Gesellschaft sind; vom fünften Theile der Gesellschaft giebt jeder 5 Thaler mehr als Personen in der ganzen Gesellschaft sind, und vom zwanzigsten Theile der Gesellschaft giebt jeder fünfmal so viel Thaler als die ganze Gesellschaft Personen

hat. Das gesammelte Geld betrug 400 Rthl. — Wie viele Personen waren in der Gesellschaft?

22.

B. sagt zu A.: hätte ich 6 Rthl. mehr, so hätte ich so viel als du, worauf A. erwidert: hätte ich noch $\frac{1}{2}$ mal so viel als ich habe, so würde ich noch einmal so viel als du haben. — Wie viel hatte jeder?

23.

Eines Thieres Name besteht aus vier Buchstaben, davon jeder durch eine für sich bestehende Gleichung bestimmt wird:

Der erste Buchstabe ist der Anfangsbuchstabe einer Zahl, die man erhält, wenn man ihre Quadratwurzel mit 1000 multiplizirt.

Der zweite Buchstabe ist wieder der erste Buchstabe einer Zahl, wo der Rest, wenn man von ihr 4 subtrahirt, so groß ist als der Quotient, wenn man sie durch 2 dividirt.

Der dritte Buchstabe ist der zweite Buchstabe einer Zahl, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn man von ihr 5 subtrahirt, den Rest quadrirt, von diesem Quadrate die eben quadrirte Zahl wieder subtrahirt und den Rest durch 6 dividirt, man zum Quotienten die Zahl selbst wieder erhält.

Der vierte Buchstabe ist wieder einer Zahl Anfangsbuchstabe, die so bestimmt wird: wenn man sie zum Quadrat erhebt und dann 1 zu addirt, man so viel erhält, als wenn man zu ihr selbst 1 addirt, diese Summe quadrirt, und vom Quadrate 14 subtrahirt.

Welche Zahlen sind dies, und wie heißt das Thier?

Anmerk. Auch hier liegt den Buchstaben in Beziehung auf die Zahlen, eine andere Bedeutung unter, als bei den übrigen Namengleichungen; es ist diese Bedeutung ähnlich mit der, bei der dritten Aufgabe.

24.

A. und B. treten gemeinschaftlich einen Handel an, wozu B. noch $\frac{1}{2}$ mal mehr als A. giebt; jetzt will C. diesem Handel beitreten, und nachdem er zufolge des Vertrags so viel als A. und B. zusammen gegeben hatte, so war das Geld aller dreier zusammen, dreimal so viel als B. allein gegeben hatte und noch 2000 Rthl. mehr. — Wie viel gab ein jeder Beitrag?

25.

Wie heißt der Mann, dessen Name aus 8 auf folgende Weise bestimmten Buchstaben besteht: der Erste ist 3 mehr als der fünffache Zweite, der Dritte ist 10 weniger als der Erste, der Vierte ist der dreifache Zweite, der Fünfte ist 2 mehr als der Vierte, der Sechste ist 3 größer als der Dritte, der Siebente ist gleich dem dritten Theile des Ersten weniger 1, der Achte ist 1 weniger wie der Erste; man weiß auch noch, daß die Summe der drei ersten Buchstaben gleich ist der Summe des Fünften, Sechsten und Siebenten, plus der Zahl 2. — Wie heißen die 8 Zahlen, und wie der Mann?

26.

Nach einer Schlacht bestand ein Regiment aus $\frac{4}{9}$ so viel Offiziere als Unteroffiziere; multiplizirt man die Zahl der Offiziere und Unteroffiziere mit einander, so ist das Produkt noch um 800 mehr als die doppelte Zahl der Gemeinen; wird aber die Anzahl der Gemeinen durch die der Offiziere dividirt, so ist der Quotient 35. — Wie viel waren es noch Offiziere, Unteroffiziere und Gemeine?

27.

Es hat jemand 2 Uhren und 2 Dosen. Er bestimmt den Werth jedes dieser 4 Stücke auf folgende Art: die Werthe der Uhren verhalten sich wie 1 zu 3, und die theuerste Dose ist viermal so viel an Werth als die wohlfeilere; der Preis der wohlfeileren Dose beträgt nur die

Hälfte vom Preise der wohlfeileren Uhr. Wenn ich aber die Summe der Werthe der theurern Uhr und der wohlfeileren Dose quadrire, so ist dies Quadrat gerade so groß wie wenn ich zum Werthe aller vier Stücke fünf Thaler zuthue, diese Summe mit 50 multiplizire und zu dem neuen Produkte den Werth der wohlfeileren Dose mit $68\frac{1}{3}$ multiplizirt, addire. — Was kostet jedes Stück?

28.

Aus 6 Buchstaben besteht eines Mannes Name, die, wie folgt bestimmt werden: der Erste ist die Hälfte des Zweiten, der Dritte ist 2 weniger als der Erste, der Vierte ist gleich 9 plus zweimal dem Sechsten, und der Fünfte 3 mehr als der Letzte. Es ist noch bekannt, daß der dritte Buchstabe gleich dem Sechsten, und der Zweite um 9 größer als der Sechste ist. — Wie heißen die Zahlen und wie der Name?

29.

Bei einer Herrschaft erhält der erste Bediente jährlich 4 Rthl. mehr als der Zweite; als der erste Bediente $\frac{1}{2}$ Jahr und der Zweite $\frac{1}{4}$ Jahr gedient hatten, gingen beide aus dem Dienste. Jeder erhielt, was ihm für seine Dienstzeit zukam, und beide hatten zusammen 17 Rthl. in gedachten Zeiten verdient. Was war der festgesetzte Lohn eines jeden gewesen?

30.

In 2 Stuben befinden sich Kinder; in der zweiten 4 Kinder mehr als in der ersten Knaben, und doch 4 Kinder weniger als in der ersten Kinder. Die Kinder beider Stuben sind zusammen 44. — Wie viele Knaben und wie viele Mädchen waren in der ersten, wie viele Kinder aber in der zweiten Stube?

31.

Ein Landmann giebt seinen, während des Krieges erlittenen Schaden an Ochsen, Schafen und Schweinen auf 1700 Rthl. an; die Anzahl jeder verlornen Viehart bestimmt

er so: es waren 8 mal so viel Schafe als Ochsen, und $\frac{5}{8}$ der Anzahl Schafe waren Schweine. Es kostete ein Schaf halb so viel Thaler als es der Ochsen waren, ein Ochse 16 mal so viel wie ein Schaf, ein Schwein aber so viel als es der Ochsen waren. — Wie viel waren es von jeder Viehart?

32.

Bei einer zu bezahlenden Weinzeche findet es sich, daß jeder Trinker den fünften Theil so viel Geld geben muß, als es Personen sind, worauf der Wirth 45 Rthl. erhielt. — Wie viele Personen waren es?

33.

Ein Bauer hat eine Anzahl alter Hühner, wovon jede so viele Jungen hat als es Alte sind; ein zweiter Bauer hat nur halb so viel alte Hühner als der erste Bauer, doch hat jede dieser alten Hühner noch einmal so viel Jungen als es der Alten sind. Die Anzahl der alten und jungen Hühner beider Bauern zusammen, ist 27 mal so groß, als die Anzahl der Hühner des zweiten Bauers. — Wie viele alte und wie viele junge Hühner hatte jeder?

34.

Es giebt jemand das Alter seines Bruders, seiner Schwester und sein eigenes Alter auf folgende Weise an: als mein Großvater starb war mein Bruder noch einmal so alt als ich, als mein Vater starb war der Bruder 4 Jahr älter als ich, und als die Mutter starb war der Bruder doppelt so alt als die Schwester. Als der Vater starb war die Schwester gerade so alt, wie der Bruder beim Tode des Großvaters war; ich war aber beim Tode des Vaters doppelt so alt, als meine Schwester beim Tode desselben. — Wie alt war jeder beim Tode des Großvaters, des Vaters und der Mutter, und wie viele Jahre starb der Vater nach dem Großvater und die Mutter nach dem Vater?

35.

Einer Fruchtart Namen besteht aus vier Buchstaben, wovon jeder der Anfangsbuchstaben einer Zahl ist, welche 4 Zahlen auf folgende Weise bestimmt werden: die Summe der 3 ersten ist 27, die Summe der ersten, zweiten und vierten ist 23, die Summe der drei ersten weniger der vierten ist 22, endlich ist die Summe der ersten, dritten und vierten weniger der zweiten gleich 10. — Welche Zahlen sind dies, und wie heißt die Fruchtart?

36.

Nach der Verordnung eines Verstorbenen sollen zuerst die Schulden bezahlt werden, welche die Hälfte der Nachlassenschaft betragen. Die Wittwe soll den fünften Theil des Hinterlassenen bekommen, der Sohn $\frac{3}{4}$ von dem der Wittwe, die Tochter den zehnten Theil vom ganzen hinterlassenen Vermögen, und ein Bruder des Verstorbenen die Hälfte von dem der Tochter. Was der Sohn, die Tochter und der Bruder zusammen bekommen, trug 1200 Rthl. aus. Was erhält jeder, und wie viel beträgt das Hinterlassene?

37.

Der Name eines Mannes besteht aus 8 Buchstaben, die so bestimmt sind: der Zweite ist 1 größer als der doppelte Siebente, der Vierte ist gleich dem Siebenten, der Sechste ist das Vierfache des Ersten, der Achte ist die Differenz wenn man vom Dritten den Fünften abzieht, der Zweite ist gleich dem Achten weniger zweimal den Fünften, der Siebente ist der Quotient den man erhält, wenn man vom Achten 2 subtrahirt und die Differenz durch 3 dividirt, endlich ist der Sechste so viel als die Summe des Vierten und Fünften. — Diese so bestimmten Zahlen und der zugehörige Namen werden gesucht.

38.

Wenn man von einem Orte A. nach einem andern B. will, so trifft man die Oerter C., D. und E. nach dieser

Ordnung. Es ist von C. bis D. nur halb so weit als von A. bis C., von D. bis E. ist es 10 Meilen mehr wie von C. bis D, von E. bis B. aber 10 Meilen weniger wie von A. bis C. Ferner ist der Weg von A C. weniger dem C D., so groß wie der Unterschied des Weges E B. weniger dem D E., und diese Differenz verdoppelt. — Wie groß ist jeder Weg zwischen 2 zunächst auf einander folgenden Oertern?

39.

Die Höhe eines Thurms wird auf folgende Art bestimmt: die ganze Höhe besteht aus den Höhen 1) der daneben stehenden Kirche, 2) von dieser bis zur Gallerie des Thurms, 3) von dieser bis zu einem Knopfe und 4) aus dem Knopfe und dem darauf stehenden Kreuze. Jede dieser Höhen wird nun wieder so bestimmt: das Viertel der Höhe der Kirche zu dieser Höhe addirt, giebt den Abstand der Spitze der Kirche von der Gallerie, von der Gallerie bis zum Knopf ist der vorigen Höhe Hälfte, und Knopf nebst Kreuz ist der fünfte Theil der Höhe zwischen Spitze der Kirche und Gallerie. Wenn man überdies die beiden Höhen der obersten Abschnitte mit einander multiplizirt, so ist das Produkt gleich 1600, hiervon aber noch das sechsmalige Produkt der Höhe zwischen Kirchspitze und Gallerie subtrahirt. — Wie viel beträgt jeder Abschnitt, und der Thurm?

40.

Was würde wohl ein schöner Ring und eine Uhr kosten, wenn das Quadrat der Differenz vom Werthe des Ringes weniger dem der Uhr glich 2500, und die Summe beider 750 Rthl. wäre?

41.

Es hat jemand 2 Klumpen Metall, einen von Eisen der 100 Pfund wiegt und 8 Rthl. kostet, und einen von Kupfer der 80 Pfund wiegt und 48 Rthl. kostet. Es wünscht jemand eine Mischung aus beiden Metallarten zu haben, die 5 Rthl. kosten und 30 Pfund wiegen soll. —

Wie viel Pfund Metall muß von jeder Sorte genommen werden?

42.

Es giebt jemand ein Kapital zu 5 p. Ct. auf Zinsen, und schlägt stets die Zinsen zum Kapital; nach Verlauf von 3 Jahren erhält er an Kapital und Zinsen $11576\frac{1}{4}$ Rthl. zurück. — Wie groß war das ausgeliehene Kapital?

43.

A. und B. haben zusammen 80 Rthl.; A. verschenkt von seinem Gelde 3 mal so viel als B., und nun hat jeder noch 20 Rthl. — Wie viel hatte jeder am Anfange?

44.

Jemand der nach seinem, seiner Mutter und seines Bruders Alter gefragt wurde, gab zur Antwort: meine Mutter ist dreimal so alt als der Bruder, ich bin aber 5 Jahr älter als derselbe: wenn man vom Produkt der Jahre der Mutter und des Bruders die meinigen abzieht, so bleibt 655 zum Reste. — Wie alt war er, die Mutter und der Bruder?

45.

Ein Spieler sagte: ich verlor $\frac{3}{4}$ des Geldes welches ich bei mir hatte, und gewann nachher $\frac{1}{3}$ von dem Anfangs gehabten wieder; das Produkt des Gewinnstes und Verlustes ist 300 Rthl. — Wie viel hatte er am Anfange, was betrug der Gewinnst und was der Verlust?

46.

Wie heißt die Zahl die quadrirt und hierauf um 9 vermindert, so viel giebt als wenn man sie mit 8 multiplizirt?

47.

Es bilden drei Zahlen eine geometrische Progression, welche die Eigenschaft hat, daß die Letzte durch die Erste dividirt, zum Quotienten die halbe Zweite giebt, ferner ist die Summe der beiden ersten Zahlen 4 weniger als die Dritte. — Diese Zahlen sind?

48.

Es hat jemand ein richtiges Spiel Karten, dieses ist beliebig gemischt; nun wird die erste Karte besehen, verdeckt auf den Tisch gelegt und so viele Karten darauf gelegt, daß ihre Summe 10 (oder m) macht, d. h. die Augen der untersten Karte mit den darauf gelegten Karten, wobei das Aß nur 1 gilt; so ist ein Haufen fertig. Jetzt besieht man die folgende Karte und verfährt mit ihr wie vorher, legt dann den dritten, vierten u. s. w. das ganze Spiel in Haufen aus; das Bild gilt 10 oder einen Haufen allein. — Wenn nun die Anzahl der Haufen v beträgt, und am letzten Haufen w Karten fehlen, so soll man eine Formel suchen, welche die Anzahl der Augen, die bei den verschiedenen Haufen zuerst vorkommen, angiebt.

Anmerk. Nennt man die Anzahl der Karten des Spiels z. B. n, so kann man die Formel auch bei einer willkührlichen Menge von Karten, deren Anzahl man jedoch wissen muß, gebrauchen.

49.

Ein Gefäß soll aus 12 Pfund reinem Golde bestehen; man wiegt es unter Wasser und es verliert $\frac{3}{4}$ Pfund; da Gold nur den 18ten Theil, unter Wasser gewogen, verliert, Silber aber den zwölften Theil, so ist die Frage: da das Gefäß nicht aus reinem Golde bestehen kann, wie viel Silber ist ihm beigemischt, da es genau 12 Pfund Gewicht hat.

50.

In dem Magazin einer Festung liegt so viel Getreide Vorrath, daß 400 Pferde 28 Tage lang unterhalten werden können; nachdem dieselben bereits 4 Tage davon gefressen haben, verlangt man, daß die Pferde bei $\frac{3}{4}$ Ration, sich noch 40 Tage aufhalten sollen. — Wie viele Pferde müssen also weggenommen werden, wenn dieser Bedingung ein Genüge geleistet werden soll?

Resultate der vorstehenden funfzig Gleichungen.

---

1) 500 Fuß.
2) 24 Quart.
3) Die Zahl 100, das Thier: Hund.
4) 10 Frauen, 20 Männer und 30 Kinder.
5) A. hatte 24000 Rthl. Vermögen und 12000 Schulden,
B. — 2000 — — — 10000 —
6) Werth des Ringes 800 Rthl., der der Dose 1200 Rthl.
7) Der Wagen 800, die Pferde 600, das Zubehör 100 Rthl.
8) Die Zahlen sind: 24, 14, 17, 10, der Name: York.
9) Alter des Königs 48 Jahr, des Prinzen 12 Jahr.
10) Vater 48, Mutter 36, Tochter 12 Jahr. Nach 24 Jahren.
11) Die Zahlen: 22, 9, 5, 13; die Stadt: Wien.
12) Die Zahlen: 2, 14, 4, 5; der Name: Bode.
13) Vier Würfel.
14) Es waren 4 Stücke roth, 6 St. schwarz, 12 St. blau, 8 St. weiß.
15) Die Zahlen 15, 17, 1, 7, die Stadt: Prag.
16) Der Vater ist 60, der Sohn 32 u. die Tochter 28 Jahr.
17) Die Zahlen 15, 1, 17, 9, 18, die Stadt: Paris.
18) In $9\frac{3}{133}$ Stunden, oder 9 Stunden 1 Minute 21 Sekunden $12\frac{24}{133}$ Tertien.
19) Bei der 384sten Meile.
20) Es sind 800 Einwohner und 100 Häuser.
21) Es waren 20 Personen.
22) A. hatte 24, B. 18 Rthl.
23) Die Zahlen: Millionen, 8, 15, 7, das Thier: Maus.
24) A. gab 4000, B. 6000 und C. 10000 Rthl.
25) Die Zahlen: 18, 3, 8, 9, 11, 11, 5, 17, der Name: Schiller.
26) Offiziere 40, Unteroffiziere 90, Gemeine 1400.
27) Die erste Uhr 30, die zweite 90, die erste Dose 15, die zweite 60 Rthl.
28) Die Zahlen 7, 14, 5, 19, 8, 5, der Name: Göthe.
29) Der erste Bediente bekam 24, der zweite 20 Rthl. Lohn.

30) In der ersten Stube waren 16 Knaben und 8 Mädchen, in der zweiten Stube nur 20 Kinder.
31) Ochsen 10, Schafe 80, Schweine 50.
32) Es waren 15 Personen.
33) Der erste Bauer hatte 8 alte und 64 junge Hühner, der zweite 4 alte und 32 junge Hühner, zusammen 108.
34) Als der Großvater starb war die Schwester noch nicht geboren, der ältere Bruder war 8, der jüngere 4 Jahr alt, als der Vater starb war die Schwester 8 Jahr, der erste Bruder 20, der zweite 16 Jahr, als die Mutter starb war die Schwester 12, der erste Bruder 24, der zweite 20 Jahr. Der Vater starb daher 12 Jahr nach dem Großvater und die Mutter 4 Jahr nach dem Vater.
35) Die Zahlen: 7, 11, 9, 5, die Fruchtart: Senf.
36) Das hinterlassene Vermögen betrug 4000 Rthl., die Schulden 2000, die Wittwe erhielt 800, der Sohn 600, die Tochter 400, der Bruder 200 Rthl.
37) Die Zahlen 2, 11, 20, 5, 3, 8, 5, 17, der Name: Blücher.
38) Von A. bis B. sind 240 Meilen, v. A. bis C. 80, v. C. bis D. 40, von D. bis E. 50 u. v. E. bis B. 70 Meilen.
39) Die Kirche ist 80 Fuß, von der Spitze der Kirche bis zur Gallerie sind 100 Fuß, von hier bis zum Knopfe 50 Fuß, der Knopf nebst Kreuz betragen 20 Fuß, also 250 Fuß der ganze Thurm.
40) Die Uhr 350 Rthl., der Ring 400 Rthl.
41) Für 2 Rthl. Eisen oder 25 Pfund, für 3 Rthl. Kupfer oder 5 Pfund von demselben.
42) Das Kapital betrug 10000 Rthl.
43) A. hatte 50, B. 30 Rthl.
44) Die Mutter war 45, der 1ste Sohn 20, der 2te 15 Jahr.
45) Am Anfang hatte er 60 Rtl. verlor 15 u. gewann 20 Rtl.
46) Die Zahl ist 9.
47) Die Zahlen 4, 8, 16.
48) Die verdeckten Augen betragen $(m + 1) v - n - w$.
49) Es waren 9 Pfund Gold und 3 Pfund Silber.
50) 60 Pferde müssen abgehen.

II. Trigonometrische Aufgaben.

Anmerk. Nachfolgende trigonometrische Aufgaben haben nur den Zweck, den Anfänger in der Auflösung der ebenen Triangel für sich, oder in nicht sehr zusammengesetzten Verbindungen unter einander, zu üben. Die hierzu nöthigen Vorkenntnisse müssen natürlich aus dem Vortrage oder aus Lehrbüchern über die Trigonometrie bekannt seyn. Es werden hier nur immer die gegebenen Stücke und die Resultate angeführt, und es ist leicht einzusehen, daß wenn diese als gegeben angenommen werden, umgekehrt die gegebenen Stücke wieder berechnet werden können, wodurch sich nachfolgende Aufgaben verdoppeln. Um die Figurenmenge nicht unnütz zu vermehren, dient ein Triangel immer mehreren Aufgaben, und der Löser der Aufgaben kann, wenn es ihm nöthig ist, leicht einen Triangel zeichnen und die gegebenen Stücke dabei schreiben, wodurch man dem Gedächtnisse zu Hülfe kommen kann. Die Figur selbst, trägt übrigens bei trigonometrischen Berechnungen, wenig oder nichts zur Auflösung bei. — Der vierte Abschnitt wird mehrere Anwendungen der Trigonometrie, besonders auf die regulären Figuren, so wie der dritte Abschnitt auf die Kreisberechnung enthalten.

I. Auflösung der Triangel aus einer Seite und zwei Winkeln.

1) Gegeben: $\angle B = R$ (Recht) zu finden: $\angle C = 19^\circ 40'$
$\angle A = 70^\circ 20'$ (Figur 1) $BC = 738,26$
$AC = 784$ $AB = 263,85$

2) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle C = 9^\circ$
$\angle A = 81^\circ$ (Figur 1) $BC = 40372,7$
$AC = 40876$ $AB = 6409,15.$

3) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle C = 22° 5'$
$\angle A = 67° 55'$ (Figur 1) $AC = 1244,8$
$AB = 468$ $BC = 1153,5$

4) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle A = 52° 56'$
$\angle C = 37° 4'$ (Figur 1) $AB = 19,468$
$AC = 32,3$ $AC = 25,714$

5) Gegeben: $AC = 17628$ zu finden: $AB = 17070$
$\angle B = 114° 13'$ (Fig. 2) $BC = 1269$
$\angle C = 62° 1'$ $\angle A = 3° 46'$

6) Gegeben: $BC = 100$ zu finden: $\angle A = 21° 41'$
$\angle B = 75° 21'$ (Fig. 2) $AB = 268,6$
$\angle C = 82° 58'$ $AC = 261,86$

7) Gegeben: $BC = 4832$ zu finden: $\angle A = 100°$
$\angle B = 52° 55'$ (Fig. 2) $AB = 2233,8$
$\angle C = 27° 5'$ $AC = 3914,2$

8) Gegeben: $BC = 875,4$ zu finden: $\angle A = 81° 35'$
$\angle B = 87° 25'$ (Fig. 2) $AC = 884$
$\angle C = 11°$ $AB = 168,8$

9) Gegeben: $BA = 44682$ zu finden: $AC = 58565$
$\angle B = 94° 16'$ (Fig. 2) $BC = 34915$
$\angle A = 36° 22'$ $\angle C = 49° 22'$

10) Gegeben: $BC = 496$ zu finden: $\angle A = 126° 38'$
$\angle B = 37° 18'$ (Fig. 2) $BA = 171,06$
$\angle B = 16° 4'$ $AC = 374,5$

11) Gegeben: $BA = 3899$ zu finden: $BC = 2820$
$\angle B = 42° 5'$ (Fig. 2) $AC = 2614$
$\angle C = 91° 36'$ $\angle A = 46° 19'$

12) Gegeben: $BC = 4286$ zu finden: $\angle C = 35° 21'$
$\angle B = 41° 16'$ (Fig. 2) $AB = 2554,8$
$\angle A = 103° 23'$ $AC = 3174,2$

II. Auflösung der Triangel aus zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüber liegenden Winkel.

13) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle A = 58° 2'$
$AC = 1826$ Fig. 1) $\angle C = 31° 58'$
$AB = 967$ $BC = 1549$

14) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle A = 28^\circ\ 23'$
$BC = 16{,}5$ (Fig. 1) $\angle C = 61^\circ\ 37'$
$AC = 34{,}7$ $AB = 30{,}528$

15) Gegeben: $\angle B = R$ zu finden: $\angle A = 57^\circ\ 51'$
$BC = 291{,}7$ (Fig. 1) $\angle C = 32^\circ\ 9'$
$AC = 344{,}5$ $AB = 183{,}32$

16) Gegeben: $BC = 354$ zu finden: $\angle B = 46^\circ\ 20'$
$BA = 222$ (Fig. 2) $\angle C = 38^\circ\ 40'$
$\angle A = 95^\circ$ $AC = 257{,}12$

17) Gegeben: $BA = 16$ zu finden: $\angle A = 102^\circ\ 1'$
$AC = 23$ (Fig. 2) $\angle C = 30^\circ\ 43'$
$\angle B = 47^\circ\ 16'$ $BC = 30{,}637$

18) Gegeben: $BC = 5426$ zu finden: $\angle B = 40^\circ\ 40'$
$BC = 3321$ (Fig. 2) $\angle C = 35^\circ\ 7'$
$\angle A = 104^\circ\ 13'$ $AC = 3647$

19) Gegeben: $BC = 56$ zu finden: $AB = 56{,}002$
$AC = 17$ (Fig. 2) $\angle C = 81^\circ\ 17'$
$\angle A = 81^\circ\ 16'$ $\angle B = 17^\circ\ 27'$

20) Gegeben: $BC = 8726$ zu finden: $AC = 590{,}23$
$AB = 3446$ (Fig. 2) $\angle B = 37^\circ\ 25'$
$\angle A = 116^\circ\ 4'$ $\angle C = 26^\circ\ 31'$

21) Gegeben: $BC = 5438$ zu finden: $AB = 13117$
$AC = 6344$ (Fig. 2) $\angle C = 122^\circ\ 53'\ 49''$
$\angle B = 36^\circ\ 44'$ $\angle A = 20^\circ\ 22'\ 11''$

22) Gegeben: $BC = 466{,}9$ zu finden: $AC = 285{,}25$
$BA = 271{,}4$ (Fig. 2) $\angle B = 33^\circ\ 55'$
$\angle A = 114^\circ\ 2'$ $\angle C = 32^\circ\ 3'$

III. Auflösung von Triangeln aus zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüber liegenden Winkel.

23) Gegeben: $AC = 828$ zu finden: $\angle N = 127^\circ\ 51'$
$CN = 644$ (Fig. 3) $AN = 258$
$\angle A = 37^\circ\ 54'$ $\angle ACN = 14^\circ\ 15'$
$\angle N$ soll stumpf seyn.

24) Gegeben: $AC=74$ zu finden: $\angle B=59^\circ\ 35'$
$CB=60$ (Fig. 3) $\angle ABC=76^\circ\ 3'$
$\angle A=44^\circ\ 22'$ $AB=83{,}275$
$\angle B$ soll spitz seyn.

25) Gegeben: $AC=863$ zu finden: $\angle N=109^\circ\ 55'$
$\angle A=36^\circ\ 51'$ (Fig. 3) $\angle ACN=33^\circ\ 44'$
$NC=544$ $AN=509{,}6$
$\angle N$ soll stumpf seyn.

26) Gegeben: $AC=426$ zu finden: $\angle N=119^\circ\ 25'$*
$CN=CB=381$ (Fig. 3) $\angle B=60^\circ\ 35'$
$\angle A=38^\circ\ 14'$ $AN=185{,}96$
$\angle N$ und $\angle B$ sollen $AB=483{,}27$
beide gefunden werden. $\angle ACN=22^\circ\ 21'$
$\angle ACB=81^\circ\ 11'$

27) Gegeben: $AC=4386$ zu finden: $\angle N=146^\circ\ 33'\ 18''$
$CN=CB=3645$ (Fig. 3) $\angle B=33^\circ\ 26'\ 42''$
$\angle A=27^\circ\ 16'$ $AN=856{,}96$
Sowohl $\angle N$ als $AB=7103{,}8$
$\angle B$ werden gesucht. $ACB=119^\circ\ 18'$
$ACN=6^\circ\ 11'$

28) Gegeben: $AC=426$ zu finden $\angle B=36^\circ\ 15'$
$\angle A=24^\circ$ (Fig. 3) $\angle ACB=119^\circ\ 45'$
$CB=293$ $AB=625{,}48$
$\angle B$ soll spitz seyn.

IV. Auflösung der Triangel aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

29) Gegeben: $AB=146$ zu finden: $\angle A=87^\circ\ 55'$
$BC=345$ (Fig. 2) $\angle C=25^\circ\ 5'$
$\angle B=67^\circ$ $AC=317$

30) Gegeben: $\angle A=136^\circ\ 2'$ zu finden: $\angle B=34^\circ\ 37'$
$AC=3400$ (Fig. 2) $\angle C=9^\circ\ 21'$
$AB=972$ $BC=4154{,}9$

31) Gegeben: $\angle C=44^\circ\ 26'$ zu finden $\angle A=96^\circ\ 40'$
$AC=526$ (Fig. 2) $\angle B=38^\circ\ 54'$
$CB=832$ $AB=586$

Ab 67

	Gegeben:		zu finden:
32)	$\angle B = 77°$		$\angle A = 81°$
	$BC = 591$	(Fig. 2)	$\angle C = 22°$
	$B = 224$		$AC = 582{,}6$
33)	$\angle B = 49° 18'$		$\angle A = 91° 32' 52''$
	$BC = 639$	(Fig. 2)	$\angle C = 39° 9' 8''$
	$BA = 403{,}6$		$AC = 484{,}6$
34)	$\angle B = 38° 2'$		$\angle A = 112° 25'$
	$BC = 15$	(Fig. 2)	$\angle C = 29° 33'$
	$BA = 8$		$AC = 9{,}99$
35)	$\angle A = 37° 18'$		$\angle B = 102°$
	$AB = 524$	(Fig. 2)	$\angle C = 40° 42'$
	$AC = 786$		$BC = 486{,}94$
36)	$\angle C = 72° 54'$		$\angle A = 71° 6'$
	$AC = 224{,}5$	(Fig. 2)	$\angle B = 36°$
	$CB = 361{,}4$		$AB = 365{,}1$
37)	$\angle A = 104° 8'$		$\angle B = 55° 18'$
	$AB = 294{,}3$	(Fig. 2)	$\angle C = 20° 34'$
	$AC = 688{,}95$		$BC = 812{,}56$
38)	$\angle C = 49° 7'$		$\angle A = 94° 41'$
	$AC = 16$	(Fig. 2)	$\angle B = 36° 12'$
	$BC = 27$		$AB = 20{,}481$

A B C

V. Aus den drei Seiten eines Triangels die drei Winkel zu berechnen. (Fig. 2 bleibt bei allen diesen Aufgaben.)

	Gegeben:	zu finden:
39)	$AB = 146$	$\angle C = 22° 27'$
	$AC = 251$	$\angle B = 41° 4'$
	$BC = 342$	$\angle A = 116° 29'$
40)	$AB = 98$	$\angle C = 40° 48'$
	$AC = 76$	$\angle B = 30° 27'$
	$BC = 142$	$\angle A = 108° 45'$
41)	$AB = 36$	$\angle C = 93° 27'$
	$AC = 21$	$\angle B = 35° 37'$
	$BC = 28$	$\angle A = 50° 56'$
42)	$AB = 234$	$\angle C = 102° 17' 17''$
	$AC = 116$	$\angle B = 28° 58' 11''$
	$BC = 180$	$\angle A = 48° 43' 32''$

43) Gegeben: $AB = 84$ zu finden: $\angle C = 72^\circ\ 1'\ 53''$
$AC = 66$ $\angle B = 49^\circ\ 25'\ 45''$
$BC = 75$ $\angle A = 58^\circ\ 32'\ 22''$

44) Gegeben: $AB = 26$ zu finden: $\angle B = 127^\circ\ 48'$
$AC = 54$ $\angle C = 22^\circ\ 20'$
$BC = 34$ $\angle A = 29^\circ\ 52'$

45) Gegeben: $AB = 4$ zu finden: $\angle C = 34^\circ\ 3'$
$AC = 5$ $\angle B = 44^\circ\ 25'$
$BC = 7$ $\angle A = 101^\circ\ 3'$

46) Gegeben: $AB = 3$ zu finden: $\angle C = 26^\circ\ 24'$
$AC = 6$ $\angle B = 117^\circ\ 16'$
$BC = 4$ $\angle A = 36^\circ\ 20'$

VI. Berechnung des Flächeninhalts der Triangel, aus den verschiedenen sie bestimmenden Stücken, ohne Rücksicht auf die fehlenden Seiten und Winkel. (Figur 2 gilt für alle Aufgaben.)

47) Gegeben: $AB = 34{,}7$; $BC = 86{,}8$; $\angle B = 42^\circ\ 4'$ — der Inhalt ist hieraus berechnet $= 1009{,}9\ \square$

48) Gegeben: $AB = 7$; $AC = 8$; $BC = 9$ — das $\triangle$ ist $= 268{,}34\ \square$

49) Gegeben: $BC = 164$; $\angle B = 15^\circ\ 4'$; $\angle C = 38^\circ\ 11'$ — $\triangle = 2696{,}95\ \square$

50) Gegeben: $BC = 346$; $BA = 221$; $\angle A = 104^\circ\ 6'$ — $\triangle = 23345\ \square$

51) Gegeben: $AB = 5$; $AC = 6$; $BC = 9$ — $\triangle = 14{,}144\ \square$

52) Gegeben: $BC = 381$; $BA = 244$; $\angle B = 61^\circ\ 4'$ — $\triangle = 40680$

53) Gegeben: $BC = 836$, $BA = 441$, $\angle A = 107^\circ$ } $\triangle = 123180$

54) Gegeben: $BA = 64$, $\angle B = 38^\circ\ 9'$, $\angle A = 45^\circ\ 4'$ } $901,91 = \triangle$

A B D C

VII. Vermischte Aufgaben, wo mehrere Triangel in Verbindung stehen.

55) Beim Vierecke ABCD (Figur 4) sind folgende Stücke gegeben: $AD = 20$, $DC = 28$, $CB = 36$, $\angle D = 62^\circ$ und $\angle DCB = 104^\circ$. Zieht man die Diagonale AC, und fällt vom Punkte A auf DC und BC die Perpendikel AN und AM, so soll berechnet werden: $AN = 17,658$ $\angle DAC = 74^\circ\ 30'$ $\angle DCA = 43^\circ\ 30'$ $\angle ACB = 60^\circ\ 30'$ $\angle CAB = 75^\circ\ 48'$ $\angle ABC = 43^\circ\ 42'$ $AC = 25,653$ $AB = 32,467$ $AM = 22,328$ $\triangle DAC = 247,184$ $\triangle ABC = 401,088$ daher das ganze Viereck $= 649,272$ und sein Perimeter $= 116,467$.

56) Um eine gewisse Höhe BE zu messen, zu deren Fuß man nicht kommen konnte, war man im Stande aus zwei über einander liegenden Punkten A und G (Fig. 5) die Winkel $BGC = 18^\circ$ und $BAD = 20^\circ$ zu messen; die Standlinie AG betrug 12 Fuß, und der Punkt A lag 8 Fuß über dem Erdboden; es versteht sich, daß $FE \# AD \# GC$ und daß eben so $GF \# BE$ läuft, daß ferner $\angle C = \angle D$ u. s. w. sämmtlich rechte Winkel sind; es fragt sich: wie groß ist AB ($= 327$), BD ($= 111,8$), GB ($= 323$), BC ($= 99,8$) und BE ($= 119,84$)?

Anmerk. Man hat nur nöthig, aus dem Triangel BGA entweder die BG oder die BA, und alsdann im rechtwinklichen Triangel BGC oder BAD die BC oder die BD zu entwickeln, kann aber zur Sicherheit der Rechnung auch aus jedem Triangel besonders die Höhe berechnen, wo alsdann dieselben Resultate kommen müssen.

57) Wie hoch ist aber BE so wie die übrigen Stücke (bei Fig. 5), wenn der Berechnung folgende Stücke zum Grunde liegen: GA = 16 Fuß, DE = AF = 12 Fuß, ∠ BGC = 34° 16′ ∠ BAD = 36° 58? — Antwort: GB = 271,38 BA = 280,7 BC = 152,75 BE = 180,75. — Berechnet man aus △BAD die Höhe BE, so ergiebt sie sich = 180,79 also 0,04 Unterschied, welche Differenz darin ihren Grund hat, daß wir uns bei allen diesen Berechnungen mit den nächst kleineren Logarithmen, sowohl bei den Zahlen als bei den trigonometrischen Linien, als wahre Logarithmen begnügen.

58) Es sey (Fig. 6) zum Behufe der Messung der Höhe AE, zu deren Fuß man auch nicht kommen kann, die Standlinie FC angenommen, so daß die Punkte F und C mit der Höhe AE (die natürlich lothrecht auf EF angenommen wird) in derselben Vertikalebene liegen; man habe nun durch unmittelbare Messung gefunden, daß FC = GB = 79° (Ruthen), ferner ∠ ABD = 30° und ∠ AGD = 74° 35′; BF = GC = DE = 4 Fuß als Höhe des Winkelmeß-Instruments, ∠ ADB natürlich ein rechter; man verlangt nun die fehlenden Stücke? Antw.: AG = 56,27° AB = 108° AD = 544 Fuß, daher AE = 548′.

59) Wenn aber (dieselbe Fig. 6) FC = 428′ ∠ ABD = 23° 8′ ∠ AGD = 32° 7′ und BF = 3′ ist? — Antw.: AB = 1457,3′ AG = 1076′ AD = 572,5′ und AE = 575,5′.

Anmerk. Es kann auch AE die Höhe eines frei schwebenden Körpers, einer Wolke, eines Luftballs, auch einer Himmelserscheinung seyn; nur müssen alsdann die Winkel bei B und bei G in demselben Augenblicke gemessen werden, und da die Punkte B und G wohl selten alsdann in der Vertikallinie mit der Höhe AE liegen mögten, so sind hier noch fernere Berechnungen und Reduktionen nöthig, die näher zu betrachten hier nicht der Ort ist.

60) Von zwei Punkten aus (Figur 7), nämlich A und B, kann man zwei Gegenstände S und E, zu denen und zwischen welche man nicht kommen kann, sehen, man mißt die Winkel EBS = 11° 4′ SBA = 76° 26′ SAE = 11° 14′ und EAB = 90° 31′ so wie die Linie AB = 14°; man verlangt nicht nur die Entfernung zwischen S und E, sondern auch die Linien SA, EA, SB und EB. — Antwort: SA = 429,29 EA = 404,13 BE = 404,5 SB = 432,36 und SE = 85,285.

Anmerk. Wir haben hier wieder zwei Triangel SAE und SBE, woraus wir die Linie SE entwickeln können, und man kann sie wieder, um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, aus beiden Triangeln entwickeln und den Unterschied suchen. Ferner kann man alle Winkel, die hierbei vorkommen, zur Uebung mit berechnen.

61) (Dieselbe Fig) Wenn aber AB = 54 ∠SAE = 49° 18′ ∠EAB = 25° 11′ ∠SBA = 42° und ∠SBE = 56° 2′ ist? — Antw.: SA = 403,6 EA = 639 SB = 564 EB = 274,6 und SE = 469,01.

Anmerk. Mehrere dergleichen Aufgaben gehören in die praktische Geometrie, und vorstehende sind hier nur gegeben, um eine Triangel-Verbindung dadurch hervorzubringen. — Mehrere trigonometrische Aufgaben werden wir auch noch bei den analytischen Aufgaben bekommen.

III. Aufgaben aus der Kreisberechnung.

Abkürzungen. Bei nachfolgenden Aufgaben bedeutet immer: K den Kreis, R den Radius, D den Durchmesser, P die Peripherie, W den Centriwinkel, B den

Bogen in Länge (rectificirt), S den Sector, Sg das Segment, Sh die Sehne, A das Apothema (den Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällt), Rg den Ring; beim Ringe beziehen sich die kleinen Buchstaben r, d und p auf die innere oder kleinere Peripherie.

Einleitung. Aus der Lehre der Kreisberechnung ist bekannt, daß sich der $D : P = 100 : 314\ldots = 1 : 3{,}14\ldots$ und die Zahl 3,14 unter dem Namen π (Py) bekannt ist. Die Untersuchung der übrigen Verhältnisse gehört hier nicht her, und obgleich das Verhältniß $D : P = 113 : 355$ vollkommner ist, so bedienen wir uns doch des einfacheren $\pi = 3{,}14\ldots$ Es ist ferner aus der Kreislehre bekannt, daß immer die Verhältnisse $360° : W$, $K : S$, $P : B$ gleich sind, worauf die Berechnung der Bogen und der Sectoren beruhet. Aus den gegebenen Stücken die unbekannten zu berechnen, wird nun gewöhnlich das Bilden einer Proportion aus eben gedachten Verhältnissen erfordert, die ich daher einer jeden Aufgabe, wo es nöthig schien, beigesetzt habe, und zwar immer mit der unbekannten Größe anfangend. Sollte nun das unbekannte Glied sich noch nicht gleich aus der Proportion unmittelbar berechnen lassen, so wird auch immer das noch erst zu entwickelnde Glied angedeutet werden. Wer die Berechnung mit Logarithmen versteht, der wird wissen Proportionen hiermit einfach zu behandeln, wer sie nicht kennt hat einen mühsameren Weg. Wichtiger ist aber dies: bei der Berechnung der Segmente sind nur zwei Stücke zu geben nöthig, für den der Trigonometrie versteht, und da ich dies allgemein bei meinen Lesern voraussetzen kann, so folgen auch die Aufgaben der Kreisberechnung, den trigonometrischen Aufgaben; wer die Trigonometrie nicht versteht, muß bei allen Aufgaben, wo Segmente berechnet werden, das erste Stück was die nachfolgenden Aufgaben als berechnet angeben, als gegeben annehmen, wo er sodann auch ohne Trigonometrie, ja selbst ohne Logarithmen die Segmente berechnen kann. Das Segment selbst ist immer

die Differenz eines Sectors und eines Triangels, daher der Sector zuerst bekannt seyn muß; um den Triangel zu berechnen kann den Nicht-Trigonometern nur der Pythagoräische Lehrsatz dienen, um die zur Berechnung eines Triangels dienenden Elemente (Grundlinie und Höhe, hier Sh und A) zu entwickeln.

Wie bekannt, ist die Verbindung der vier Größen R, D, P und K immer so, daß aus einer derselben die übrigen drei entwickelt werden können; dies giebt nun folgende 12 Formeln, welche alle aus den beiden Grundformeln $D\pi = P$ und $R^2\pi = K$ entwickelt werden können.

Gegeben.	R	D	P	K
Gesucht.	$D = 2R$	$R = \frac{D}{2}$	$R = \frac{P}{2\pi}$	$R = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$
	$P = 2R\pi$	$P = D\pi$	$D = \frac{P}{\pi}$	$D = 2\sqrt{\frac{K}{\pi}}$
	$K = R^2\pi$	$K = \frac{D^2\pi}{4}$	$K = \frac{P^2}{4\pi}$	$P = 2\sqrt{K\pi}$

Aufgaben.

1)	Gegeben	$D = 4$	gesucht	$P? = 12{,}56$
2)	—	$D = 3{,}8$	—	$P? = 11{,}932$
3)	—	$R = 5$	—	$P? = 31{,}4$
4)	—	$R = 6$	—	$K? = 113{,}04$
5)	—	$R = 1{,}7$	—	$K? = 9{,}0746$
6)	—	$D = 3$	—	$K? = 7{,}065$
7)	—	$D = 0{,}062$	—	$K? = 0{,}00301754$
8)	—	$P = 2512$	—	$K? = 400$
9)	—	$P = 628$	—	$D? = 200$
10)	—	$K = 226{,}08$	—	$R? = 8{,}48528...$
11)	—	$K = 4236$	—	$D? = 73{,}458$
12)	—	$K = 113{,}04$	—	$P? = 37{,}68$
13)	—	$P = 9{,}42$	—	$K? = 7{,}065$

14) Gegeben P = 24,83 gesucht K? = 49,086
15) — K = 48,7 — D? = 7,8764
16) — P = 44,09 — D? = 14,0414
17) — P = 286,48 — R? = 45,617
18) — K = 0,04 — P? = 0,7088
19) — K = 76,831 — D? = 9,88
20) — P = 0,046 — R? = 0,0073
21) — R = 3 ferner W = 45° gesucht B? = 2,358
Die Proportion zur Lösung dieser Aufgabe ist: B : P = 45° : 360° daher P erst aus R berechnet werden muß.

22) Gegeb. R = 5 ferner B = 705 gef. W? = 80° 49′ 40″
W : 360° = 7,05 : P also P aus R berechnet.

23) Gegeben P = 48 ferner W = 60° gesucht B? = 8
B : P = 60° : 360°, P bereits gegeben.

24) Gegeben P = 90, B = 80 gesucht W? = 320°
25) — B = 16, W = 24° — P? = 240
26) — K = 226,08 ferner W = 40° gef. B = 5,9208
B : P = 40° : 360° daher P aus K berechnet.

27) Gegeb. B = 14,1 ferner W = 24° gef. K? = 3561,484
P : 14,1 = 360° : 24° und aus P alsdann K berechnet.

28) Gegeb. K = 1476 ferner B = 10 gef. W? = 26° 26′ 24″
W : 360° = 10 : P, und P erst aus K gesucht.

29) Gegeb. D = 4 ferner B = 12 gef. W? = 343° 56′ 24″
W : 360° = 12 : P, und P aus D zuerst gesucht.

30) Gegeb. D = 4 ferner W = 10° gef. B? = 0,34888...
B : P = 10° : 360°, aus D erst P gesucht.

31) Gegeben K = 80 ferner W = 20° gef. S? = 4,444...
S : 80 = 20° : 360°

32) Gegeben K = 80 ferner B = 4 gesucht S? = 10,095
S : 80 = 4 : P und P erst aus K gesucht.

33) Gegeben K = 7 ferner W = 120° gef. S? = 2,333...
34) — K = 6 — B = 6 — S? = 4,1661...
35) — P = 14 — B = 4 — S? = 4,4586...
S : K = 4 : 14 und K erst aus P gesucht.

36) Gegeben P = 100 ferner W = 15° gesucht S? = 33,174
S : K = 15° : 360° daher K aus P erst gesucht.

37) Gegeben D = 11 ferner B = 8° gesucht S? = 2,1107
S : K = 8° : 360°, aus D erst K gesucht.

38) Gegeben D = 15 ferner B = 40 gesucht S? = 149,99
S : K = 40 : P, K und P erst aus D gesucht.

39) Gegeben S = 60 ferner B = 15° gesucht B? = 5,6035
B : P = S : K, es muß also erst P und K gesucht werden, und zwar K : S = 360° : 15° und aus K alsdann P berechnet. Auch könnte man sagen: aus der letzten Proportion ist $K = \frac{360\,S}{15} = 24\,S$, und nach der Formel ist $P = 2\sqrt{K\pi}$, daher diese Werthe substituirt in obige Proportion, dieselbe wird $B : 2\sqrt{24\,S\pi} = S : 24\,S$ oder $B : \sqrt{24\,S\pi} = 1 : 12$

40) Gegeben S = 30 ferner B = 7,5 ges. W? = 53° 44′ 31″
In die Proportion S : K = B : P setze für K die Formel $\frac{P^2}{4\pi}$ so wird sie $S : \frac{P^2}{4\pi} = B : P$ oder $S : \frac{P}{4\pi} = B : 1$ daher $P = \frac{4\pi\,S}{B}$; hat man P so gefunden, so setzt man: W : 360° = 7,5 : P.

41) Gegeben S = 4,4 ferner K = 80 gesucht W? = 19° 48′
W : 360° = S : K

42) Gegeben S = 2,2 ferner B = 10° gesucht K? = 79,2

43) Gegeben S = 20 ferner K = 400 gesucht B? = 3,544
B : P = 20 : 400 also erst P aus K berechnet.

44) Gegeb. K = 7,28 ferner K = 4,49 ges. Rg? = 2,79
45) — Rg = 18,24 — P = 17,6 — K? = 6,422
46) — Rg = 16,21 — k = 4,3 — K? = 20,51
47) — k = 6,5 — Rg = 4,8 — D? = 3,7932
48) — R = 5,7 — B = 60° — Sh? = 5,7 und Sg? = 2,9347
49) Gegeb. P = 9,42 ferner B = 1,57 ges. Sh? = 1,5 und Sg? = 0,2033

50) Gegeben D = 30 ferner B = 60° gesucht Sh? = 15 und
Sg? = 20,335

S : K = 60° : 360° also K aus D zuerst gesucht, von S das △ subtrahirt, giebt Sg.

51) Gegeb. D = 2,4 ferner B = 120° gesucht A? = 0,6 und
Sg? = 0,8838

52) Gegeb. K = 28,26 ferner B = 3,14 ges. A? = 1,5 und
Sg? = 0,81

53) Gegeb. K = 176,825 ferner W = 60° ges. Sh? = 7,5 u.
Sg? = 5,11876

54) Gegeben P = 62,8 ferner W = 60° gesucht A? = 5 und
Sg? = 9,033

55) Gegeb. R = 3,2 ferner B = 3,349 gesucht Sh? = 3,2 und
Sg? = 0,926

56) Gegeb. D = 4,6 ferner B = 79° 20′ ges. A? = 2,0014 u.
Sg? = 3,3215

57) Gegeb. P = 138,16 fern. B = 22° ges. Sh? = 8,3954 u.
Sg? = 2,22

58) Gegeb. P = 15,7 ferner B = 46° 48′ ges. A? = 2,2493
u. Sg? = 0,2732

59) Gegeb. K = 28,26 ferner B = 8,84 ges. A? = 0,29014
u. Sg? = 12,394

60) Gegeb. K = 12,56 ferner B = 6,28 ges. Sh? = 4 und
Sg? = 6,28

61) Gegeb. R = 5 ferner B = 16° 14′ ges. A? = 4,9499 u.
Sg? = 3,4943

62) Gegeb. R = 4,5 ferner B = 9,42 ges. Sh? = 7,794 und
Sg? = 12,42675

63) Gegeb. A = 13,5 ferner Sh = 5,4 ges. K? = 595,15 u.
S? = 0,912

Anmerk. Von der 63sten Aufgabe abwärts können die Aufgaben nur durch Trigonometrie gelöset werden, von 48 bis 62 aber, wie schon gesagt, auch ohne dieselbe, wenn die erste der gesuchten Größen als bekannt angenommen wird.

64) Gegeb. $K=3,14$ ferner $Sh=0,524$ ges. $W?=30°\ 22'$ u. $Sg?=0,01201$

65) Gegeb. $R=50$ ferner $A=40$ ges. $W?=73°\ 44'$ und $Sg?=407,7$

66) Gegeb. $Sh=4$ ferner $R=7$ gesucht $A?=6,708$ und $Sg?=0,773$

67) Gegeb. $A=27$ ferner $Sh=10,8$ gesucht $S?=149,448$

68) — $K=6,28$ — $S=0,52972$ — $Sg?=0,02402$

69) — $S=56,756$ — $R=14$ — $Sg?=3,092$

70) — $K=254,34$ — $A=0,87042$ — $Sg?=111,546$

IV. Analytische Aufgaben.

Die nachfolgenden Aufgaben, sich größtentheils auf die regulären Polygone beziehend (wenn auch nicht ausschließlich), werden für jeden lösbar seyn, der die, in den drei früheren Abschnitten enthaltenen Aufgaben gelöset hat; denn sie erfordern Gleichungen, indem die unbekannten und bekannten Größen in ihrer Verbindung unter einander durch Gleichungen gegeben sind, sie bedürfen der Trigonometrie, weil Figuren berechnet werden und also auf Triangel zurück geführt werden müssen, und die Kreisberechnung ist nicht minder erforderlich, weil reguläre Polygone nur in oder um Kreisen bestehen. Daß endlich die nöthigen Kenntnisse aus der niedern Geometrie vorausgesetzt werden, versteht sich von selbst, und es sind daher in vorkommenden Fällen, wo man sich auf dieselben berufen wird, weiter keine näheren Erläuterungen nöthig. Nur einige Aufgaben, wie z. B. die ersten, können auch ohne Trigonometrie gelöset werden, und sind als Einleitung zu den folgenden anzusehen. Ueberdies wird die Rechnung mit Logarithmen vorausgesetzt, ihrem ganzen Umfange nach.

1ste Aufgabe.

Der Inhalt I und der Umfang U eines Rechtecks sind gegeben, man soll die Grundlinie und Höhe desselben finden.

Auflösung Es sey die Grundlinie $= x$ und die Höhe $= y$, so hat man, laut Aufgabe, die Gleichungen 1) $xy = I$ und 2) $2x + 2y = U$. Aus der ersten folgt $2xy = 2I$ und aus der zweiten folgt $2xy + 2y^2 = Uy$, beide von einander subtrahirt, läßt $2y^2 = Uy - 2I$, daher $y^2 - \frac{U}{2} y = -I$ und $y = \frac{U}{4} \mp \sqrt{\frac{U^2}{16} - I}$ (Nach der Theorie der unreinen quadratischen Gleichungen). Nun ist $x = \frac{I}{y}$ leicht zu finden. — Z. B. es sey $I = 24$ und $U = 22$, so ist $y = \frac{22}{4} \mp \sqrt{\frac{22^2}{16} - 24} = 5\frac{1}{2} \mp \sqrt{30\frac{1}{4} - 24} = 5\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{25}{4}} = 5\frac{1}{2} \mp \frac{5}{2} = 8$ oder 3, woraus sich $x = 3$ oder 8 ergiebt. (Indem es völlig gleichgültig ist, ob x die Höhe oder Grundlinie genannt war.)

2te Aufgabe. (Fig. 8.)

Ein Kreis hat einen Halbmesser $= r$, man soll eine beständige Zahl entwickeln, womit man r zu multipliciren hat, um die Seite eines, dem Kreise wozu r gehört, gleichen gleichseitigen Triangels zu finden.

Auflösung. Es sey Triangel ABC gleichseitig und die Seite gleich a, die Höhe $AD = h$, so ist

$$h^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

$$\text{daher } h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Der Inhalt I des Triangels ist

$$= AD \cdot BD = h \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = I \text{ und}$$

$$\text{deshalb } \sqrt{\frac{4I}{\sqrt{3}}} = a = 2\sqrt{\frac{I}{\sqrt{3}}}.$$

Ein Kreis dessen Halbmesser $= r$ ist aber $= r^2 \pi$, und dieser Kreis soll nach der Aufgabe $= I$ seyn, daher

$$a = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{r^2\pi}{\sqrt{3}}} = 2r\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Deswegen ist nun $2\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ die gesuchte beständige Zahl, die nun so in Zahlen gesucht wird:

$$\log \pi = 0{,}4969296$$
$$\log \sqrt{3} = 0{,}2385606$$
$$\log \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0{,}2583690$$
$$\log \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 0{,}1291845$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log x = 0{,}4302145$$

Die unbekannte Zahl selbst ist daher $= 2{,}6928\ldots$

z. B. der Radius $r = 46{,}7$ so ist

$$\log x = 0{,}4302145$$
$$\log 46{,}7 = 1{,}6993169$$
$$\log a = 2{,}0995314$$

und $a = 125{,}75$.

Anmerk. Beim Aufsuchen der Zahlen für gefundene Logarithmen werden immer die nächst kleineren Logarithmen als die wahren angenommen, wenn nicht die Genauigkeit der Aufgabe den Gebrauch der Proportionaltheile nöthig macht; wenn aber in der Fortsetzung der Rechnung, für eine so gefundene Zahl wieder den Logarithmus verlangt (wie in eben gehabtem Beispiele), so wird nicht der Logarithm. der Tafeln, sondern der wahre gefundene genommen.

3te Aufgabe.

Wie verhält sich die Peripherie eines Kreises zum Umfange eines, dem Kreise gleichen gleichseitigen Triangels?

Auflösung. Die Peripherie eines Kreises ist $= 2r\pi = 6{,}28 . r$; die Seite des gedachten Triangels aber nach der vorigen Aufgabe $= 2{,}6928 . r$, daher sein Umfang $= 3 . 2{,}6928 . r = 8{,}0784 . r$ daher verhält sich

$$P : U = 6{,}28 . r : 8{,}0784 . r = 628 : 808 = 157 : 202.$$

Zusatz. Nimmt man dies Verhältniß als vollkommen an, so geben die Kettenbrüche folgende Näherungsverhältnisse: $P:U = 1:1 = 3:4 = 9:7$.

Anmerk. Da diese Aufgaben den Anfänger zugleich in der Behandlung der verschiedenen Rechnungarten und deren Anwendung üben sollen, so werde ich mich der Abkürzungen die sie darbieten, wie z. B. bei den Proportionen u. s. w. bedienen, und verweise auf die Theorie dieser Lehren, um das Nähere darüber nachzulesen.

Zusatz. Aus der Geometrie ist bekannt: 1) daß unter allen gleichnamigen Figuren die regulären Figuren bei gleichem Umfange den größten Inhalt haben, daraus folgt 2) daß dieselben bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang haben. 3) Unter allen regulären Figuren von verschiedener Seitenanzahl, hat bei gleichem Umfange diejenige den größten Inhalt, welche die meisten Seiten hat, und daher 4) hat von allen regulären Figuren, die gleichen Inhalt haben, den kleinsten Umfang diejenige, welche die meisten Seiten hat. — In unserer dritten Aufgabe wurden die, in Hinsicht der Seitenzahl am meisten verschiedenen Polygone, das Triangel und der Kreis in dieser Rücksicht verglichen, und es fand sich, wie es seyn mußte, der größte Umfang beim Triangel.

Diese Sätze werden wir auch bei den folgenden Aufgaben vorzüglich ins Auge fassen.

4te Aufgabe. (Fig. 9.)

Aus der Seite S eines regulären necks, und dem Radius r des, um dasselbe beschriebenen Kreises, den Inhalt I des gedachten Polygons zu finden.

Auflösung. Wenn $AB = S$, $AO = r$, so ist

$$OC^2 = AO^2 - AC^2 = r^2 - \frac{S^2}{4} = \frac{4r^2 - S^2}{4} \text{ und}$$

$$OC = \frac{\sqrt{4r^2 - S^2}}{2}$$

nun ist $\triangle AOB = AC.OC = \frac{S}{2} \cdot \frac{\sqrt{4r^2 - S^2}}{2} = \frac{S\sqrt{4r^2 - S^2}}{4}$.
Solcher Triangel hat die reguläre Figur aber n, daher
ist $I = \frac{nS}{4}\sqrt{4r^2 - S^2} = \frac{nS}{4}\sqrt{(2r+S)(2r-S)}$

Anmerkung. Da durch r und n schon S bestimmt ist, so kann man nicht willkührlich n, r und S annehmen; die folgende Aufgabe zeigt dies bestimmter.

5te Aufgabe. (Fig. 9.)

Aus der Seite S eines regulären necks, dessen Inhalt zu finden.

Auflösung. Bedeutet auch hier AB die Seite $= S$, so ist $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ und $\angle AOC = \frac{180^\circ}{n}$; diesen Winkel, den wir in dieser und in den folgenden Aufgaben oft gebrauchen werden, wollen wir ein für alle Male v nennen; also $AOC = v$. Nun verhält sich: $OC : AC = \cos v : \sin v$ daher $OC = AC \cdot \frac{\cos v}{\sin v} = AC \cdot \frac{\cot g\, v}{\sin t}$ $\left(\text{Da } \frac{\cos}{\sin} = \frac{\cot}{\sin t} \text{ ist}\right)$ $= \frac{S \cdot \cot v}{2 \cdot \sin t}$; $\triangle AOB = OC \cdot AC = \frac{S^2 \cot v}{4 \sin t}$ und dieser Triangel hat der Inhalt des necks n, daher $I = \frac{nS^2 \cot v}{4 \sin t}$.

Z. B. Was beträgt der Inhalt eines regulären Siebenecks, wenn die Seite $= 12'$ ist? Winkel $v = \frac{180^\circ}{7} = 25^\circ\, 43'$ (nur etwas zu groß).

$$\begin{array}{rl}
\log S = \log 12 = & 1{,}0791812\ (2 \\
\log 12^2 = & 2{,}1583624 \\
\log n = \log 7 = & 0{,}8450980 \quad \text{addirt} \\
\log \cot g\, v = \log \cot g\, 25^\circ\, 43' = & 10{,}3172902 \\
\hline
\log n S^2 \cot g\, v = & 13{,}3207506 \\
\log 4 \sin t = \log 4 + \log \sin t = & 10{,}6020600 \quad \text{subtrahirt} \\
\hline
\log I = & 2{,}7186906 \quad \text{daher} \\
I = & 523{,}22\ \square'
\end{array}$$

Ferner: Was ist I, wenn $n=9$ und $s=46{,}7$ ist?
Antwort: $I=13481{,}8$. $(\log I=4{,}1297504)$

Zusatz 1. Ist $n=4$, so ist I der Inhalt eines Quadrats, muß also s^2 seyn. Bei $n=4$ ist $\angle v=45°$ wo die cot = sint ist; unsere Formel wird daher

$$I=\frac{n s^2 \cot v}{4 \operatorname{sint}}=\frac{4 . s^2 . \operatorname{sint}}{4 . \operatorname{sint}}=s^2$$ wie es seyn muß.

Zusatz 2. Ist der Umfang $=u$ und die Seitenzahl gegeben, so ist $s=\frac{u}{n}$, daher $\frac{n s^2}{4}=\frac{n}{4}\cdot\frac{u^2}{n^2}=\frac{u^2}{4n}$ und

$$I=\frac{u^2}{4n}\cot v.\frac{1}{\operatorname{sint}}=\frac{u^2.\cot v}{4.n.\operatorname{sint}}$$

Zusatz 3. Unsere Formel für I hätte auch aus der vierten Aufgabe entwickelt werden können, wenn man r aus s und n mittelst $\angle v$ berechnet hätte, und zwar:

$$AO:AC=\operatorname{sint}:\sin v \text{ daher } AO=r=\frac{s \operatorname{sint}}{2 \sin v}$$

(Da $AC=\frac{s}{2}$). Es war nun in der vierten Aufgabe $I=\frac{ns}{4}\sqrt{4r^2-s^2}$; jetzt für r seinen Werth gesetzt, giebt

$$I=\frac{ns}{4}\sqrt{\left(\frac{4s^2 \operatorname{sint}^2}{4\sin v^2}-\frac{s^2\sin v^2}{\sin v^2}\right)}=\frac{ns}{4}\sqrt{\left(\frac{s^2(\operatorname{sint}^2-\sin v^2)}{\sin v^2}\right)}$$
$$=\frac{ns}{4}\sqrt{\left(\frac{s^2\cos v^2}{\sin v^2}\right)}=\frac{ns}{4}\sqrt{\left(\frac{s^2\cot v^2}{\operatorname{sint}^2}\right)}=\frac{ns}{4}\cdot\frac{s\cot v}{\operatorname{sint}}=\frac{n s^2\cot v}{4 \operatorname{sint}}.$$

Gerade wie in dieser Aufgabe gefunden.

Anmerk. Ich führe diese, unstreitig längere Auflösung nur der Uebung wegen in Entwickelung der Formeln an, und um zu zeigen, wie man oft schon in einer Form den Keim zu einer neuen hat, ohne neue Wege zur Entwickelung derselben einzuschlagen.

Zusatz 4. Was die Berechnung der regulären Polygone um einen Kreis, in Hinsicht dieser und der vierten Aufgabe betrifft, ist wohl überflüssig näher zu erwähnen, da sich jedes reguläre Polygon um einen Kreise auch wieder in einem Kreise befindet; der Radius eines Kreises, ist zugleich das Apothema für das Polygon um den Kreis.

Doch wird die folgende Aufgabe dies in anderer Hinsicht noch betrachten.

6te Aufgabe. (Fig. 9.)

Aus dem Radius eines Kreises, die Perimeter und die Inhalte der regulären necke in und um den Kreis zu finden.

Auflösung. Es sey AB die Seite des regulären necks in, und DE um den Kreis, $OA = OF = r$ gegeben. Es verhält sich $AC : AO = \sin v \sin t$, eben so $OC : AO = \cos v : \sin t$, woraus $AC = \frac{r \sin v}{\sin t}$ und

$$OC = \frac{r \cos v}{\sin t}$$ wird; nun ist

$$\triangle AOB = AC \cdot OC = \frac{r \sin v}{\sin t} \cdot \frac{r \cos v}{\sin t} = \frac{r^2 \sin v \cdot \cos v}{\sin t^2} = \frac{r^2 \sin 2v}{2 \sin t}$$

(Indem $\frac{2 \sin v \cos v}{\sin t} = \sin 2v$ ist, wodurch $\sin v \cdot \cos v = \frac{\sin 2v \cdot \sin t}{2}$ wird.) Das ganze Polygon hat solcher Triangel n, daher $I = \frac{nr^2 \sin 2v}{2 \sin t}$ = Inhalt für das reguläre neck im Kreise.

Ferner: da $AC = \frac{r \sin v}{\sin t}$ so ist $AB = \frac{2 r \sin v}{\sin t}$ und der ganze Umfang $U = \frac{2rn \sin v}{\sin t}$.

Eben so verhält sich: $DF : OF = \tang v : \sin t$, weshalb $DF = \frac{r \tang v}{\sin t}$; nun ist $\triangle DOE = DF \cdot OF = \frac{r^2 \tang v}{\sin t}$, und $I = \frac{n r^2 \tang v}{\sin t}$.

Endlich ist $U = \frac{2rn \tang v}{\sin t}$ wie aus DF leicht zu finden ist.

7te Aufgabe.

Die Peripherie des Kreises trigonometrisch so genau als möglich zu finden, eben so den Kreis.

Auflösung. Betrachten wir den Kreis auch hier als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten

oder doch von einer bedeutenden Seitenzahl, und berechnen nun nach der vorigen Aufgabe die Perimeter solcher Polygone die wir uns um und in dem Kreise vorstellen, so liegt die Peripherie dazwischen, und muß in ihren ersten Dezimalstellen dieselbe seyn, bis wie weit die Ausdrücke für beide Perimeter in den ihrigen übereinstimmen. Man nehme hierzu das reguläre 648000 Ecks, weil hierdurch $\angle v = 1$ Secunde wird ($180° = 648000''$), so ist nach der Formel $U = \frac{2 r n \sin v}{\sin t}$ wo $r = 1$ bedeute

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log 648000 &= 5{,}8115750 \\ \log \sin 1'' &= \underline{4{,}6855749} \\ & \quad 10{,}7981799 \\ \log \sin t &= \underline{10,\qquad\quad} \\ & \quad 0{,}7981799 \end{aligned}$$

Hierzu gehört die Zahl 6,283185... welche also mit r multiplizirt werden muß um den Perimeter zu bekommen, oder der Durchmesser wird mit $\frac{6{,}283185}{2} = 3{,}141592$ multiplicirt.

Für das reguläre 648000 um den Kreis, gilt die Formel $U = \frac{2 r n \tan v}{\sin t}$; es ist

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log 648000 &= 5{,}8115750 \\ \log \tan 1'' &= \underline{4{,}6855749} \\ & \quad 10{,}7981799 \\ \log \sin t &= \underline{10,\qquad\quad} \\ & \quad 0{,}7981799 \end{aligned}$$

daher wir ganz dieselbe Zahl 6,283185 wieder erhalten.

Anmerk. Diese Zahl für die Peripherie genommen, stimmt selbst in der letzten Diagonalstelle aufs genaueste mit der bei der Kreisberechnung angegebenen Peripherie.

Bedienen wir uns nun zur Berechnung des Kreises der Formel $I = \frac{n r^2 \sin 2v}{2 \sin t}$ (6te Aufgabe) so ist $2v = 2''$ und

$$\left.\begin{array}{l}\log \sin 2'' = 4{,}9866049 \\ \log 648000 = 5{,}8115750\end{array}\right\} \text{addirt} \left\{\begin{array}{l}\text{Wenn } r = 1 \text{ an-} \\ \text{genommen wird.}\end{array}\right.$$

$$10{,}7981799$$

$$\log 2 \sin t = 10{,}3010300$$

$0{,}4971499$ wozu die Zahl 3,14159... gehört, die abermals ganz genau den Kreis giebt, weil sie die Zahl π und zugleich der Kreis für den Halbmesser $= 1$ ist ($K = r^2 \pi$; siehe die Formeln zur Kreisberechnung).

Es würde überflüssig seyn, das reguläre 648000 Eck um den Kreis noch berechnen zu wollen, da die Formel hierfür nach der 6ten Aufgabe (für diesen besonderen Fall), dasselbe geben muß, denn $\tan 1'' = \sin 1''$, und $\tan 2'' = 2 \tan 1''$ (bei sehr kleinen Winkeln wie $1''$ ist), deshalb hebt sich die 2 im Zähler gegen die im Nenner, und die Formel $I = \frac{n r^2 \sin 2v}{2 \sin t}$ wird so viel als $\frac{n r^2 \sin v}{\sin t} = \frac{n r^2 \tan v}{\sin t}$ Aus eben diesem Grunde aber, hätten wir auch bei der eben berechneten Aufgabe schon statt $\sin 2v$ nur $\sin v$, und statt $2 \sin t$ nur $\sin t$ zu nehmen brauchen. Daß dieß sehr seine Grenzen hat ist bekannt, und der Theorie nach ist nie $\sin 2a = 2 \sin a$, und bei größeren Winkeln selbst nicht einmal in der Praxis wahr. —

8te Aufgabe.

Wie verhält sich der Perimeter eines regulären Achtecks in einem Kreise, zur Peripherie des Kreises und zum Perimeter des regulären Achtecks um den Kreis? Ferner soll das Verhältniß dieser drei Flächen gegen einander gefunden werden.

Auflösung. Der Radius des Kreises kann hierbei gleich 1 angenommen werden, da das gedachte Verhältniß, bei jeder andern Annahme von R dasselbe bleibt. — Betrachten wir nun die, in der 6ten Aufgabe gefundenen Formeln für die Perimeter regulärer Polygone in und um den Kreis, so haben wir in gegenwärtigem Falle, wo

beide Achtecke sind, nicht nöthig sie zu berechnen, denn die Formeln zeigen deutlich, daß wenn $\angle v$ oder n in beiden dieselben sind (indem die Gleichheit einer dieser Größen, die der anderen schon mit sich bringt), sich beide Perimeter wie die Sinusse und Tangenten des $\angle v$ verhalten. Sucht man nun in den Tafeln für $\angle v = 22\frac{1}{2}°$ die Log. des Sinusses und der Tangente auf, und hierfür ferner die zugehörigen Zahlen, mit der Berücksichtigung, daß der Radius hier = 1 angenommen ist, so erhält man das Verhältniß beider Perimeter wie 0,38268 : 0,41421. — Wollen wir aber jetzt das Verhältniß der Peripherie des Kreises noch laut Aufgabe hinzufügen, so ist dieselbe für R = 1 doch = 6,28318, und dies scheint ungereimt mit jenem Verhältnisse der Perimeter zu seyn; aber es wird klar, daß wir jetzt beide Glieder desselben mit 16 multipliciren müssen, weil jene Formeln im Zähler noch den Factor 2 n bei sich haben der jetzt, wenn vom ganzen Umfange die Rede ist (da die ganze Peripherie des Kreises ja auch genommen wird), allerdings betrachtet werden muß, und nur vorher, wo er das Verhältniß der Perimeter selbst nicht änderte, wegbleiben konnte. Geschieht nun dies, so erhalten wir zum Resultate das Verhältniß U : P : u = 6,62736 : 6,28318 : 6,12288, welches nach Belieben verändert werden kann.

Zusatz 1. Daß die Peripherie des Kreises, nicht die mittlere Proportionale zwischen den Perimetern der gleichnamigen regulären Polygone in und um den Kreis ist (was Anfänger oft gern annehmen wollen), sondern geringer als diese, kann man aus obigem Verhältnisse leicht sehen, denn sonst mußte die Summe der Logarythmen der äußeren Glieder (welche = 1,6082963 ist), gleich seyn dem doppelten Logar. des mittleren Gliedes (ist = 1,5963590); ferner ist der halbe Logarithm. jener Summe = 0,8041481 als Logarythm. der wahren mittleren Proportionallinie noch immer größer als log 6,28318 = 0,7981795, daher sich die Peripherie wie erwähnt, dem inneren Perimeter nähert.

Was nun ferner die Flächen jener Polygone und den Kreis betrifft, so kann man hier nicht so abgekürzt wie vorher verfahren; berechnet man jede für sich (wie ein Beispiel der 7ten Aufgabe für das Polygon im Kreise gezeigt hat), ebenfalls nach der Annahme $R = 1$, wofür der Kreis $= 3,14159$ wird ($K = R^2 \pi$), so wird jenes Verhältniß: $I : K : i = 3,31370 : 3,14159 : 2,82842$.

Zusatz 2. Daß der Kreis auch nicht die mittlere Proportionalfläche, zwischen den gleichnamigen regulären Polygonen in und um sey (was doch noch immer seyn könnte, wenn es auch von seiner Peripherie und den Perimetern nicht galt, da diese Linien sich nach dem Verhältniß des Radius, die Flächen aber nach dem Quadrate desselben richten), sondern sich der Fläche um nähert (seine Peripherie näherte sich dem Perimeter in), ist hieraus eben so deutlich zu sehen, denn der Logarithmus des Products der äußeren Glieder (Summe der Logarithmen beider Glieder) ist $= 0,9718593$ was den Logarithm. der mittleren Proportionalfläche $= 0,4859296$ giebt, und der $\log K = 0,4971495$; woraus gedachte Näherung des Kreises einleuchtend wird. —

Anmerk. 1. Je größer die Anzahl der Seiten wird, je mehr schwindet natürlich jene Differenz, und man kann die Abweichung bei jedem mäßigen Polygon (wenn es nämlich das 648000 Eck nicht übertrifft, in Hinsicht der Seitenzahl, sondern bedeutend geringer ist, damit die Tafeln noch einen Ausschlag geben) leicht aufsuchen.

Anmerk. 2. Man vergleiche diese beiden Zusätze mit dem, nach der dritten Aufgabe genannten.

Anmerk. 3. Sollten die Bemerkungen dieser Aufgabe, die sehr kurz gelöset werden konnte, wohl überflüssig seyn?

9te Aufgabe. (Fig. 9.)

Wie verhalten sich die Radien zweier Kreise, in welchen ein reguläres neck und meck von gleichem Umfange beschrieben sind, gegen einander?

Auflösung. Wenn wir jenen, bei beiden Polygonen gleichen Umfang u nennen, so ist die Seite des necks $= \frac{u}{n}$ und deren Hälfte wollen wir p nennen; eben so die Seite des mecks ist $= \frac{u}{m}$ und ihre Hälfte sey q. Bedeutet nun (Fig. 9) die Linie AB zuerst die necks-Seite, so ist AC $= p$, nachher mag sie die mecks-Seite seyn, so ist AC $= q$; $\angle AOC$ ist eben so wechselsweise $= \frac{180}{n}$ und $\frac{180}{m}$.

Nun verhält sich: $AO : AC = \sin t : \sin\left(\frac{180}{n}\right)$, daher $AO = \frac{p \cdot \sin t}{\sin\left(\frac{180}{n}\right)}$ für das neck; und aus eben dem Grunde für das meck $= \frac{q \sin t}{\sin\left(\frac{180}{m}\right)} = AO$. Es wird sich daher verhalten, der Radius des necks : Radius des mecks

$$= \frac{p \cdot \sin t}{\sin\left(\frac{180}{n}\right)} : \frac{q \cdot \sin t}{\sin\left(\frac{180}{m}\right)} = \frac{p}{\sin\left(\frac{180}{n}\right)} : \frac{q}{\sin\left(\frac{180}{m}\right)}$$

$$= \frac{u}{2n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)} : \frac{u}{2m \cdot \sin\left(\frac{180}{m}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)}$$

$$: \frac{1}{m \cdot \sin\left(\frac{180}{m}\right)} = m \cdot \sin\left(\frac{180}{m}\right) : n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right)$$

(Weil Brüche von gleichen Zählern sich wie ihre Nenner umgekehrt verhalten.) — Z. B., es habe ein Fünfeck mit einem Sechsecke gleichen Umfang, so wäre das Verhältniß des Radius des Fünfecks: Radius des Sechsecks

$= 6 . \sin\left(\frac{180^\circ}{6}\right) : 5 \sin\left(\frac{180^\circ}{5}\right) = 6 . \sin 30^\circ : 5 . \sin 36^\circ$ $= 6 . 0{,}5 : 5 . 0{,}58779 = 3 : 2{,}93$; daher der Radius des Fünfecks größer als der des Sechsecks ist. —

Anmerk. Auch diese Aufgabe ist im genauesten Zusammenhange, mit jenem erwähnten Zusatze nach der dritten Aufgabe.

10te Aufgabe.

Wie verhalten sich die Perimeter, und wie die Flächen zweier, in einem und demselben Kreise beschriebenen regulären n- und mecke zu einander, und wie zur Peripherie des Kreises und zum Kreise selbst? —

Auflösung. Nach denen, in der sechsten Aufgabe bereits entwickelten Formeln, ist nunmehr diese Aufgabe leicht zu lösen. Es sey der Perimeter des necks $= U$, der des mecks $= T$, so geben jene Formeln, da der Radius ja derselbe ist, $U : T : P = \frac{2rn \sin\left(\frac{180}{n}\right)}{\sin t}$

$$: \frac{2rm \sin\left(\frac{180}{m}\right)}{\sin t} : 2r\pi = \frac{n \sin\left(\frac{180}{n}\right)}{\sin t} : \frac{m \sin\left(\frac{180}{m}\right)}{\sin t} : \pi.$$

Es sey $n = 7$ und $m = 11$, so wird

$$U : T : P = \frac{7 . \sin 25^\circ 42' 51{,}''4}{\sin t} : \frac{11 . \sin 16^\circ 21' 49''}{\sin t} : \pi$$

$$= 3{,}03744 : 3{,}09859 : 3{,}14159 = 304 : 310 : 314.$$

Die Fläche des necks sey N, die des mecks sey M und der Kreis $= K$, so wird nach der Formel der sechsten Aufgabe $N : M : K = \frac{n r^2 \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2 \sin t} : \frac{m r^2 \sin\left(\frac{360}{m}\right)}{2 \sin t} : r^2\pi$

$$= \frac{n \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2 \sin t} : \frac{m \sin\left(\frac{360}{m}\right)}{2 \sin t} : \pi := 2{,}73669 : 2{,}97356$$

$$: 3{,}14159 = 274 : 297 : 314.$$

11te Aufgabe.

Die Seite eines regulären 9ecks ist $= 46{,}7$, man verlangt die Seite eines, dem 9ecke gleichen 12ecks.

Auflösung. Wenn man den Inhalt einer Figur hat, so kann man nach der Formel, welche die fünfte Aufgabe für den Inhalt aus der Seite giebt, auch wieder die Seite finden, denn wenn $I = \frac{n s^2 \cot. v}{4 \sin t}$ so ist $\frac{4 I \sin t}{n \cot v} = s^2$ und $s = 2\sqrt{\frac{I \sin t}{n \cot v}}$; der Inhalt des 12ecks, dessen Seite verlangt wird, ist aber durch den Inhalt des 9ecks bestimmt, dem jener gleich seyn soll, und der Inhalt dieses 9ecks beträgt $= 13481{,}8$ indem sein Logar. $= 4{,}1297504$ ist (siehe das zweite Beispiel der fünften Aufgabe). Diesen Werth in die obige Formel für I gesetzt, giebt

$$\left.\begin{array}{rl} \log I = & 4{,}1297504 \\ \log \sin t = & 10, \\ \hline & 14{,}1297504 \\ \log n + \log \cot v = & 11{,}6511288 \end{array}\right\} \angle = \tfrac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

$$\begin{array}{rl} & 2{,}4786216 : 2 \\ = & 1{,}2393105 \\ \log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline & 1{,}5403405 \end{array} \text{ addirt}$$

wozu die Zahl 34,7008 als Seite des 12ecks gehört.

Zusatz. Hieraus ergiebt sich der Umfang des 12ecks $= 416{,}41$ und der des gleichen 9ecks ist $= 420{,}3$; so muß es nach dem Zusatze der dritten Aufgabe auch seyn.

12te Aufgabe. (Fig. 9.)

Wie groß ist die Seite eines regulären 18ecks, das einem Kreise gleich ist, wo dem Centriwinkel von 40°, eine Sehne von 10 Fuß zukömmt?

Auflösung. Um den Inhalt des Kreises zu finden, berechne man den Radius. Ist nun $AB = 10$, so ist $AC = 5$, eben so $\angle AOC = 20^\circ$, da $AOB = 40^\circ$ ist. Nun verhält sich: $AO : AC = \sin t : \sin 20^\circ$, oder
$\log AO = \log 5 + \log \sin t - \log \sin 20^\circ$

$$\log 5 + \log \sin t = 10{,}6989700$$
$$\log \sin 20° = \underline{9{,}5340517}$$
$$1{,}1649183 = \log AO \text{ und } AO = 14{,}619$$

Da der Kreis $= r^2\pi$ ist, so berechne man ihn mit Logarithmen, den $\log r = 1{,}1649183$ (2

$$2{,}3298366$$
$$\log \pi = \underline{0{,}4969296}$$
$$\log K = 2{,}8267662 \quad \text{daher } K = 671{,}06$$

Dies soll nun zugleich der Inhalt des 18ecks seyn, daher seine Seite $s = 2\sqrt{\frac{I \sin t}{n \cot v}}$ (siehe die vorige Aufgabe); hier ist $\angle v = 10°$ da $n = 18$ ist, also

$$\log I + \log \sin t = 12{,}8267662$$
$$\log 18 + \log \cot 10° = \underline{12{,}0089537}$$
$$0{,}8178125 : 2$$
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}4089062 \\ \log 2 = 0{,}3010300 \end{array}\right\} \text{addirt}$$
$$0{,}7099362$$ wozu die Seite des gesuchten 18ecks $= 5{,}12786'$. Wie verlangt war.

13te Aufgabe. (Fig. 9.)

Eine Formel für ein Segment (Sg) zu entwickeln, blos aus dem Apothema (a) und der Sehne (s).

Auflösung. Um das Segment AFB zu erhalten, muß das $\triangle AOB$ vom Sector OAFB subtrahirt werden, daher beide erst selbst berechnet werden müssen; um den Sector zu finden, ist der Kreis nöthig, und dieser kann aus dem Radius AO gefunden werden, dann $AO^2 = AC^2 + OC^2 = \frac{s^2}{4} + a^2 = \frac{s^2 + 4a^2}{4}$; nun ist $K = r^2\pi$ also $= \frac{(s^2 + 4a^2)\pi}{4}$. Nennt man $\angle AOB = v$, so verhält sich $K : S = 360° : v$ und es ist $S = \frac{K.v}{360} = \frac{(s^2 + 4a^2)\pi v}{4.360}$ $= \frac{(s^2 + 4a^2)\pi 2.\frac{v}{2}}{360.4}$. Das $\triangle AOB$, welches subtrahirt

werden muß, ist $= \frac{s}{2} . a = \frac{sa}{2}$, daher ist das $Sg = S - \Delta$

$= \frac{(s^2 + 4a^2)\pi . 2 . \frac{v}{2}}{360 . 4} - \frac{sa}{2}$. Jetzt fehlt nur noch die Berechnung des Winkels v oder $\frac{v}{2}$. Es verhält sich aber beim ΔAOC, $OC : AC = \cos\frac{v}{2} : \sin\frac{v}{2} = a : \frac{s}{2}$, und

es ist $\frac{a}{\frac{s}{2}} = \frac{2a}{s} = \frac{\cos\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}} = \cot . \frac{v}{2}$. Aber diese Cotangente können wir nicht in unseren obigen Ausdruck einführen, sondern dieser verlangt den Winkel selbst, da wir nun eben $\frac{2a}{s}$ als cotg $\angle \frac{v}{2}$ fanden, so können wir für $\angle \frac{v}{2}$ auch setzen $\angle \text{cotg} \frac{2a}{s}$ d. h. der Winkel dessen cotg $= \frac{2a}{s}$ ist. So wird nun unserer obiger Ausdruck für

$$Sg = \frac{(s^2 + 4a^2)\pi . 2 . \angle \text{cotg} . \frac{2a}{s}}{360 . 4} - \frac{sa}{2}.$$

Da das erste Glied dieses Ausdrucks den Sector, und das zweite den Triangel giebt, so kürze man die Formel selbst durch Vereinigung beider Glieder nicht weiter ab, selbst wenn man im ersten Gliede die 2 des Zählers gegen die 4 im Nenner zum Theil aufheben kann.

Es sey z. B. $a = 4$ und $s = 5$, so ist $4a^2 + s^2 = 89$, ferner ist $2\pi = 6,28$ und $\frac{sa}{2} = 10$. Nun suche man den Winkel, dessen Cotangente $= \frac{2 . a}{s} = \frac{8}{5}$ ist, denn dieser Winkel selbst muß multipliciren. Diesen Ausdruck wollen wir jetzt durch Logarithmen berechnen, wobei nicht zu vergessen ist, daß der log sint $= 10$ in den Tabellen ist, wo wir doch nachher den zugehörigen Winkel aufsuchen müssen,

ferner ist $\cot = \frac{\cos . \sin t}{\sin}$ und wir haben in unserer Formel $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ angenommen, weshalb wir zum log $\frac{8}{5}$ noch den log sint zu zuaddiren haben. Nun ist

$$\log 8 + \log \sin t = 10{,}9030900$$
$$\log 5 = \underline{0{,}6989700}$$
$$\log \cot . \frac{v}{2} = 10{,}2041200$$

Der Winkel dessen log cot dies ist, ist der Winkel von 32° (noch keine Minute zu klein), welcher also in obige Formel eingeführt, das $Sg = \frac{89 . 6{,}28 . 32}{1440} - 10$ giebt. (Hätte $\angle \frac{v}{2}$ noch Minuten, so müßten die Grade sowohl oben wie die 360 unten zu Minuten gemacht werden.)

Nun ist $\log 89 = 1{,}9493900$
$\log 6{,}28 = 0{,}7979596$ addirt
$\log 32 = \underline{1{,}5051500}$
$4{,}2524996$
$\log 1440 = \underline{3{,}1583625}$ subtrahirt
$1{,}0941371$ hierzu die Zahl $12{,}42 = S$

folglich $Sg = S - \Delta = 12{,}42 - 10 = 2{,}42$.

14te Aufgabe. (Fig. 10.)

Das Triangel ABC ist gleichschenklich, $BA = BC = 7{,}8$ der $\angle B$ als der ungleiche Winkel des Triangels ist $= 44° \, 8'$; man soll die Radien zweier Kreise finden, wo die Peripherie des einen gleich dem Perimeter dieses Triangels, und der andere Kreis selbst gleich dem Inhalte des Triangels ist.

Auflösung. Es muß die Grundlinie und Höhe des Triangels zuerst berechnet werden, welche letztere man daher von B auf AC fälle nach D. Jetzt verhält sich: $AD : AB = \sin \angle ABD : \sin t$, d. h.

$$AD : 7{,}8 = \sin 22° \, 4' : \sin t$$

$$\log 7{,}8 = 0{,}8920946$$
$$\log \sin 22^\circ\, 4' = 9{,}5748240$$
$$10{,}4669186$$
$$\log \sin t = 10,$$

0,4669186 hierzu die Zahl 2,9303 = AD, deshalb AC = 2 AD = 2.2,9303 = 5,8606, folglich der Umfang des Triangels = 2AB + AC = 21,4606. Setzt man dies = P, so ist die Formel für den Radius eines Kreises aus der Peripherie: $R = \frac{P}{2\pi} = \frac{21{,}4606}{6{,}28}$ = 3,4172 (durch Logarithmen berechnet).

Nun muß noch die Höhe BD gesucht werden, und da verhält sich: BD : AB = cos ∠ ABD : sint oder BD : 7,8 = cos 22° 4′ : sint

$$\log 7{,}8 = 0{,}8920946$$
$$\log \cos 22^\circ\, 4' = 9{,}9669614$$
$$10{,}8590560$$
$$\log \sin t = 10,$$

0,8590560 wozu die Zahl 7,2286 = BD

Es ist nun △ ABC = BD . AD, da man die Logarithmen für diese beiden Zahlen hat, so addire man sie, es ist

$$\log BD = \log 7{,}2286 = 0{,}8590560$$
$$\log AD = \log 2{,}9303 = 0{,}4669186$$
$$1{,}3259746$$

Hierzu den Inhalt des △ = 21,182. Dieser soll nun einem Kreise gleich seyn dessen Radius gesucht wird, es ist aber $R = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$; nun ist

$$\log K = \log 21{,}182 = 1{,}3259746$$
$$\log \pi = 0{,}4969296$$
$$0{,}8290450 : 2$$
$$0{,}4145225$$

wozu die Zahl 2,5973 als Radius des Kreises gehört.

Zusatz. Daher ist der Kreis, dessen Inhalt das Triangel ist, kleiner, als der Kreis, dessen Peripherie der Umfang des Triangels ist.

15te Aufgabe. (Figur 10 und 11.)

Bei einem Triangel BAC sind zwei Seiten AB = 40,3 und AC = 94,6, nebst dem eingeschlossenen Winkel A = 61° gegeben; man verlangt die Seite eines, diesem Triangel gleichen Quadrats, so wie den Radius eines Kreises, worin dieses Quadrat beschrieben werden kann.

Auflösung. Fälle von B auf AC den Perpendikel BD, so verhält sich: BD : AB = sin 61° : sint, log AB = log 40,3 = 1,6053050
log sin 61° = 9,9418193

11,5471243
log sint = 10,

1,5471243

wozu die Zahl 35,247 = BD. — $\triangle ABC = BD \cdot \frac{AC}{2}$ = 35,247 · 47,3 = 1667,1831. Hieraus wird die Seite des verlangten Quadrats = $\sqrt{1667,1831}$ = 40,83 seyn. Nennt man eines Kreises Radius = R, so ist die Seite des Quadrats in diesem Kreise = $R\sqrt{2}$ = 40,83, deshalb ist $R = \frac{40,83}{\sqrt{2}} = 28,871$.

16te Aufgabe. (Fig. 12.)

Bei dem Vierecke ABDC sind drei Seiten, AC = 7,8, BD = 14,5 und CD = 26,9 nebst 2 Winkeln ∠ C = 47° 15′ und ∠ D = 30° 21′ gegeben; wie groß ist der Perimeter, und wie groß der Inhalt dieses Vierecks?

Ferner soll man die Radien zweier Kreise finden, in welchen einen sich ein reguläres 9eck von dem Perimeter dieses Viereck, und in den anderen ein reguläres 12eck von dem Inhalte dieses Vierecks, beschreiben lassen.

Auflösung. Fälle die Perpendikel AE und BF von den Punkten A und B auf die Seite CD, so ist das Viereck in die beiden Triangel CAE, BFD und in das Paralleltrapez EABF worin EF die Höhe ist, zerlegt. Wird jede dieser 3 Flächen für sich berechnet, so ist ihre

Summe das Viereck. Betrachte

CE : CA = cos C : sint d. h. CE : 7 ... 94914 als ... rieben

Nun ist log 7,8 = 0,8920946
 log cos 47° 15′ = 9,8317423
 10,7238369
 log sint = 10,
 0,7238369 = l

Ferner:

AE : AC = sin C : sint d. h. AE : 7,8 = sin 47° 15′ : sint
Es ist log 7,8 + log sin 47° 15′ — log sint = 0,7579814
weshalb AE = 5,7277.

Beim △DBF verhält sich DF : DB = cos 30° 21′ : sint daher wird log DF = log DB + log cos 30° 21′ — log sint = 1,0973561 dazu die Zahl 12,512 = DF. Eben so wird nun BF berechnet, indem BF : BD = sin D : sint und log BF = log BD + log sin 30° 21′ — log sint = 0,8649009 wozu die Zahl 7,3265 gehört. — Wenn man nun △CAE berechnen will, so ist dasselbe $= \frac{CE.AE}{2}$ eben so △BFD $= \frac{BF.DF}{2}$; diese Ausdrücke sind leicht durch Logarithmen zu berechnen, da man die Logarithmen der einzelnen Linien bereits hat;

Für △CAE $= \frac{CE.AE}{2}$		Für △BFD $= \frac{BF.DF}{2}$	
log CE =	0,7238369	log BF =	0,8649009
log AE =	0,7579814	log DF =	1,0973561
	1,4818183		1,9622570
log 2 =	0,3010300	log 2 =	0,3010300
	1,1807883		1,6612270
daher △CAE =	15,163	weshalb △BFD =	45,838

Die Linie EF ist = CD — (CE + FD) = 26,9 — 17,8066 = 9,0934. Nun ist der Inhalt des Parallelltrapezes

$$ABFE = \frac{(EA+BF)\,EF}{2} = \frac{(5{,}7277 + 7{,}3265)\,9{,}0934}{2}$$

$$= \frac{13{,}0542 \,.\, 9{,}0934}{2} = 6{,}5271 \,.\, 9{,}0934 = 59{,}353$$ (durch Lo-

Endlich ist Viereck CABD $= \triangle$ CAE + Trapez EABF $= 120{,}354$.

Bei

und An nun auch den Perimeter des Vierecks zu finden, geß man die Seite AB berechnen, zu welchem Ende man aus A die AO $\ddagger$ CD zieht, denn nun ist AO $=$ EF $= 9{,}0934$, ferner BO $=$ BF $-$ FO $=$ BF $-$ AE $= 7{,}3265 - 5{,}7277 = 1{,}5988$; und AB $= \sqrt{Ao^2 + Bo^2}$ $= \sqrt{9{,}0934^2 + 1{,}5988^2} = 9{,}2328$.
Jetzt ist CA + AB + BD + DC $= 58{,}4328$.

Um den zweiten Theil der Aufgabe zu erfüllen, wollen wir zuerst das reguläre 9eck betrachten dessen Umfang = dem des Vierecks seyn sollte. Nach der 6ten Aufgabe ist der Inhalt eines regulären n ecks im Kreise, dessen Radius r ist, $I = \frac{n r^2 \sin 2v}{2 . \sin t}$, daher $r = \sqrt{\frac{2 I . \sin t}{n . \sin 2v}}$; nach der 5ten Aufgabe ist der Inhalt eines regulären n ecks aus dem Umfange u berechnet, $I = \frac{u^2 \cot v}{4 n \sin t}$; wird dieser Werth für I in jenen oberen Ausdruck für r gesetzt, so ist

$r = \sqrt{\frac{2 u^2 \cot v . \sin t}{4 . n . n . \sin t . \sin 2v}} = \sqrt{\frac{u^2 . \cot v}{2 n^2 \sin 2v}}$; der $\angle$ v ist = dem halben Centriwinkel, daher hier $= \frac{180}{9} = 20^\circ$ und $2v = 40^\circ$.
Nun ist $u = 5?{,}4328$ daher

$$\log 58{,}4328 = 1{,}7666567 \;(2$$
$$\log u^2 = 3{,}5333134$$
$$\log \cot 20^\circ = 10{,}4389341$$
$$13{,}9722475 = \log u^2 \cot v.$$

Ferner $\log n = \log 9 = 0{,}9542425 \;(2$
$$\log n^2 = 1{,}9084850$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \sin 2v = \log \sin 40^\circ = 9{,}8080675$$
$$12{,}01?5825 = \log 2 n^2 \sin 2v$$

Diesen Logarithmus von den des Zählers abgezogen, läßt $13{,}9722475 - 12{,}0175825 = 1{,}954?650$, und weil die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, so ist nun endlich

$\log r = \frac{1,9546650}{2} = 0,9773325$ wozu die Zahl 0,94914 als Radius des Kreises gehört, worin jenes 9eck beschrieben werden kann.

Zusatz 1. Die Peripherie des hierzu gehörigen Kreises ist = 59,606 ($\log P = 1,7752921$), also wie es seyn muß, größer als der Perimeter des 9ecks, der = 58,4328 war. —

Noch müssen wir den Radius des zweiten Kreises berechnen, worin laut Aufgabe ein, jenem Vierecke gleiches reguläres 12eck beschrieben werden kann. Nehmen wir wieder jene Formel der 6ten Aufgabe, so ist

$r = \sqrt{\frac{2 I \sin t}{n . \sin 2v}}$ wie wir eben entwickelt haben, hier ist nun I selbst bekannt, als = 120,354 = Viereck; n ist = 12, daher $\angle 2v = \frac{360}{12} = 30°$. So wird nun

$$\begin{aligned} \log I = \log 120,354 &= 2,0804605 \\ \log \sin t &= 10, \\ \log 2 &= \underline{0,3010300} \\ & \quad 12,3814905 \\ \log \sin 30° &= 9,6989700 \\ \log 12 &= \underline{1,0791813} \\ & \quad 10,7781513 \end{aligned}$$

So wird nun der $\log \sqrt{\frac{2 I \sin t}{n \sin 2v}} = 0,8016696$ wozu die Zahl 0,63338 als Radius des zweiten verlangten Kreises gehört.

Zusatz 2. Der Inhalt des Kreises ist = 125,97 ($\log K = 2,1002688$), also größer als das Viereck = 120,354; wie es auch seyn muß.

17te Aufgabe.

Es ist ein reguläres Fünfeck gegeben, dessen Seite = 7,7 ist; man will einen Ring (Rg) haben, der gleich diesem Fünfecke, und dessen innere Peripherie gleich dem Perimeter eines, jenem Fünfecke gleichen Quadrats ist. — Wie groß werden beide Durchmesser des Ringes seyn?

Auflösung. Berechne den Inhalt des gedachten Fünfecks, nach der Formel $\frac{n s^2 \cot g\, v}{4 \sin t}$, so ist $\angle v = \frac{180}{5} = 36°$, daher: $\log s = \log 7{,}7 = 0{,}8864907 (2$

$$\log 7{,}7^2 = 1{,}7729814$$
$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$\log \cot 36° = 10{,}1387390$$
$$12{,}6106904$$
$$\log 4 \sin t = 10{,}6020600$$
$$2{,}0086304$$

Hiernach ist das Fünfeck selbst $= 102{,}007$.

Die innere Peripherie des verlangten Ringes soll nun der Perimeter eines Quadrats seyn, das diesem Fünfecke gleich ist; daher soll $Q = 102{,}007$ seyn, und die Seite $S = \sqrt{102{,}007} = 10{,}0998$, daher der Perimeter $= 4 \cdot 10{,}0998 = 40{,}3992$; soll nun dies die Peripherie eines Kreises seyn, so muß dessen Radius $= \frac{P}{2\pi} = \frac{40{,}3992}{6{,}28} = 6{,}433$ seyn. Um ferner den Radius des großen Kreises zu bekommen, muß man den kleinen Kreis und den Rg addiren, daher erst wieder der kleine Kreis selbst aus seinem nunmehr gefundenen Radius berechnet werden muß; es ist nun $K = r^2 \pi$ und $\log r = 0{,}8084156 (2$ (wofür die Zahl 6,433 gefunden wurde)

$$\log r^2 = 1{,}6168312$$
$$\log 3{,}14 = 0{,}4969296$$
$$\log K = 2{,}1137608$$

Hiernach ist $K = 129{,}94$; wird nun der Ring hierzu addirt, so wird der große Kreis $= 129{,}94 + 102{,}007 = 231{,}947$; nach der Formel $R = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$ jetzt den Radius berechnet, so wird derselbe $= 8{,}5946$; der kleine Radius war bereits $= 6{,}433$ gefunden. Also sind endlich die Durchmesser: $D = 17{,}1892$ und $d = 12{,}866$.

18te Aufgabe. (Fig. 10.)

Es ist ein Kreisbogen = B gegeben, der n Grade hat; man verlangt eine Formel für die Höhe eines gleichschenklichen Triangels, dessen Grundlinie gleich dem Radius, und dessen Umfang gleich der Peripherie des Kreises ist, wozu jener Bogen gehört.

Auflösung. Suche die Peripherie des Kreises P, so ist sie $= \frac{360 . B}{n}$ (P : B = 360 : n°), und hieraus den Radius welcher $= \frac{P}{2\pi} = \frac{360 . B}{2\pi n} = \frac{180 B}{\pi n}$. Diese Linie soll zugleich die Grundlinie des gleichschenklichen Triangels seyn, dessen Umfang $= P = \frac{360 . B}{n}$ ist; zieht man die Grundlinie vom Umfang ab, und dividirt den Rest durch 2, so hat man eine der gleichen Seiten des gleichschenklichen Triangels, welche daher seyn wird: $AB = \frac{\frac{360 . B}{n} - \frac{180 B}{\pi n}}{2}$

$$= \frac{360 \pi B - 180 B}{2 . n . \pi} = \frac{180 B (2\pi - 1)}{2 n \pi} = \frac{90 B (2\pi - 1)}{n\pi}$$

$$= \frac{90 B (6,28 - 1)}{n . \pi} = \frac{90 . B . 5,28}{n\pi} = \frac{475,2 B}{n\pi} = \frac{z B}{n\pi}$$

(wenn wir $z = 475,2$ setzen). Nun ist $BD^2 = BA^2 - AD^2$

$$= BA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{z B}{n\pi}\right)^2 - \left(\frac{180 B}{2\pi n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{z B}{n\pi}\right)^2 - \left(\frac{90 B}{n\pi}\right)^2 = \frac{z^2 B^2 - 90^2 B^2}{n^2 \pi^2} = \frac{B^2 (z^2 - 90^2)}{n^2 \pi^2}.$$

Daher die Höhe $BD = \sqrt{\frac{B^2 (z^2 - 90^2)}{n^2 \pi^2}} = \frac{B}{n\pi} . \sqrt{(z^2 - 90^2)}$

$$= \frac{B}{n\pi} \sqrt{(z + 90)(z - 90)} = \frac{B}{n\pi} \sqrt{(475,2 + 90)(475,2 - 90)}$$

$$= \frac{B}{n\pi} \sqrt{(562,2 . 385,2)} = \frac{B}{n\pi} \sqrt{216559,4} = \frac{B}{n} . \frac{465,35}{3,14}$$

$= \frac{B}{n} . 148,2$. (Laut logarithmischer Berechnung, wo der Logarithmus für 148,2 = 2,1708588 sich ergiebt.)

Anmerk. Es versteht sich, daß $\angle n$ hier in Graden gerechnet ist, und wenn Minuten gegeben werden, so müssen diese erst zu Bruchgraden gemacht werden.

Zusatz. Es sey $B = 84,7$ und $\angle n = 24^\circ\ 15'$ $= 24\frac{1}{4}^\circ = \frac{97^\circ}{4}$, so ist die Höhe $= \frac{B}{n} . 148,2 = \frac{84,7}{\frac{97}{4}} . 148,2$

$= \frac{4 . 84,7 . 148,2}{97}$.

Nun ist
$$\left.\begin{array}{r} \log 4 = 0,6020600 \\ \log 84,7 = 1,9278834 \\ \log 148,2 = 2,1708588 \end{array}\right\} \text{addirt}$$
$$\begin{array}{r} 4,7008022 \\ \log 97 = 1,9867717 \\ \hline 2,7140305 \end{array}$$
wozu die Zahl 517,64 als Höhe BD gehört.

19te Aufgabe. (Fig. 13.)

Aus zwei aneinander stoßenden Sehnen AB und BC eines Kreises nebst dem Radius OB, den Winkel zu finden, den beide Sehnen mit einander machen, und eben so den Abschnitt zu berechnen, worin diese Sehnen sich befinden.

Auflösung. Nenne $AB = a$, $BC = b$ und den Radius $BO = r$; ziehe die Radien OC und OA, so ist nach dem aus der Trigonometrie bekannten Satze,

$\cos \angle CBO = \frac{(b^2 + r^2 - r^2) \sin t}{2rb} = \frac{b^2 \sin t}{2rb} = \frac{b . \sin t}{2r}$, eben so

$\cos \angle ABO = \frac{a \sin t}{2r}$; hat man nun beide Winkel gefunden, so ist ihre Summe der verlangte Winkel ABC. — Z. B. es sey $a = 7,5$ $b = 4,8$ und $r = 6$, so ist $\cos CBO = \frac{4,8 \sin t}{12}$

daher $\log 4,8 = 0,6812412$	Eben so $\cos ABO = \frac{7,5 \sin t}{12}$
$\log \sin t = 10,$	$\log 7,5 + \log \sin t = 10,8750613$
$10,6812412$	$\log 12 = 1,0791813$
$\log 12 = 1,0791813$	$9,7958800$
$9,6020599$	hierzu gehört $\angle 51^\circ\ 20'$
wozu $\angle 66^\circ\ 26'$	

Folglich ist $\angle CBA = 66° 26' + 51° 20' = 117° 46'$. Wird nun $\angle CBA$ von 180° subtrahirt, so bleibt $\angle CDA = 180° - 117° 46' = 62° 14'$ übrig, welcher verdoppelt $\angle COA$ giebt $= 124° 28'$ (weil die Summe der gegenüber liegenden Winkel in einem Vierecke im Kreise immer 180° beträgt, und weil der Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels auf demselben Bogen ist). Da der $\angle CBA$ stumpf ist, so liegt er nicht in dem Abschnitte, worin der Mittelpunkt liegt; man fälle daher von O auf AC den Perpendikel OE, um ihn sowohl wie die Sehne AC zu berechnen, damit man $\triangle COA$ erhalte, welches vom Sector abgezogen das Segment übrig läßt. Es verhält sich nun:

CO : CE = sin t : sin 62° 14′	CO : OE = sin t : cos 62° 14′
log CO = log 6 = 0,7781513	log CO = log 6 = 0,7781513
log sin 62° 14′ = 9,9468707	log cos 62° 14′ = 9,6682665
10,7250220	10,4464178
log sin t = 10,	log sin t = 10,
0,7250220	0,4464178
wozu die Zahl 5,3091 = OE	hierzu die Zahl 2,7952 = OE

Dies giebt $\log \triangle COA = 1,1714398$ und $\triangle = 14,84$.

Um den Sector zu finden, schließe man:
$S : K = 124° 28' : 360°$, es ist aber $K = 6^2 \cdot 3,14 = 113,04$
daher $S : 113,04 = 7468' : 21600'$

log 113,04 = 2,0532321
log 7468 = 3,8732043
5,9264364
log 21600 = 4,3341537
1,5919827 wozu der Sector = 39,082;

deshalb ist endlich das Segment = Sector — Triangel = 39,082 — 14,84 = 24,242 = Sg. Wie verlangt war.

20ste Aufgabe. (Fig. 13.)

Aus drei Seiten eines Vierecks im Kreise, nebst dem Radius des Kreises, den Inhalt des Vierecks zu berechnen.

Auflösung. Wenn drei Seiten eines Vierecks im Kreise gegeben sind, so kann man aus ihnen und dem

Radius die vierte Seite auf folgende Art berechnen: man berechne, wenn z. B. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $OA = r$ gegeben sind, die drei Centriwinkel AOB, BOC und COD, indem man sagt:

$$\cos AOB = \frac{(r^2 + r^2 - a^2)\,\text{sint}}{2rr} = \frac{(2r^2 - a^2)\,\text{sint}}{2r^2}$$

und eben so die anderen beiden Centriwinkel findet; subtrahirt man nun die Summe aller dreier von $4R = 360°$ so bleibt $\angle DOA$ übrig, und hat man diesen, so ist wieder $AD = \sqrt{2r^2 - \frac{2r^2 \cos DOA}{\text{sint}}}$. Diese Linie AD nenne man nun d. — Wenn die drei Seiten eines Triangels, z. B. n, m und p heißen, so ist, wie bekannt, die Formel für den Inhalt des Triangels aus den drei Seiten allein bestimmt folgende:

$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{[(n+m+p)(n+m-p)(n+p-m)(p+m-n)]}$ welche Formel viel leichter zu behandeln ist als es Anfangs scheinen mögte. Wenden wir dies auf die Triangel unserer vorliegenden Aufgabe, mit Berücksichtigung ihrer Namen an, so erhalten wir:

$$\Delta AOB = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+r+r)(a+r-r)(a+r-r)(r+r-a)]}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+2r)a.a.(2r-a)]} = \frac{1}{4}\sqrt{[(2r+a)(2r-a)a^2]}$$
$$= \frac{a}{4}\sqrt{(4r^2-a^2)}.$$

Ganz auf demselben Wege findet man:

$$\Delta BOC = \frac{b}{4}\sqrt{(4r^2-b^2)},\ \Delta COD = \frac{c}{4}\sqrt{(4r^2-c^2)},$$
$$\Delta DOA = \frac{d}{4}\sqrt{(4r^2-d^2)},$$

folglich die Summe aller dieser Triangel oder das Viereck

$$ABCD = \frac{a\sqrt{(4r^2-a^2)} + b\sqrt{(4r^2-b^2)} + c\sqrt{(4r^2-c^2)} + d\sqrt{4r^2-d^2)}}{4}$$

Z. B. es sey $a = 7$, $b = 4$, $c = 8$, $r = 5$, so ist zuerst $\cos AOB = \frac{(2r^2 - a^2)}{2r^2} = \frac{(50-49)\,\text{sint}}{50} = \frac{1.\text{sint}}{50}$, daher $\log\cos = \log \text{sint} - \log 50 = 9{,}3010300$, wozu der

$\angle 78^\circ\ 28'$ gehört; $\cos BOC = \frac{(50-16)\,\text{sint}}{50} = \frac{34\,.\,\text{sint}}{50}$, woraus sich $\log\cos = 0{,}8325089$ und $\angle BOC = 47^\circ\ 10'$; ferner $\cos COD = \frac{(50-64)\ \text{sint}}{50} = \frac{-14\,.\,\text{sint}}{50}$. Hier mögte es schwieriger scheinen den zugehörigen Winkel zu finden, weil sich ein negativer Factor -14 im Ausdrucke befindet, und negative Größen keine Logarithmen haben *), — aber, der negative Factor, ist ein Zeichen daß der Cosinus negativ ist und dies, daß der zugehörige Winkel ein stumpfer, und zwar das Supplement eines spitzen ist, welchem jener Cosinus als positiv genommen zukömmt. Nun würde der Winkel, welcher den Cosinus $\frac{14\,.\,\text{sint}}{50}$ hätte, gleich $73^\circ\ 45'$ seyn, daher $\angle COD = 180^\circ - 73^\circ\ 45' = 106^\circ\ 15'$ ist. Nun addire man die drei berechneten Centriwinkel, so erhält man: $78^\circ\ 28' + 47^\circ\ 10' + 106^\circ\ 15' = 231^\circ\ 53'$, folglich $\angle AOD = 360^\circ - 231^\circ\ 53' = 128^\circ\ 7'$.

Jetzt muß die Seite AD berechnet werden, und ist selbige

$$= \sqrt{\left(2r^2 - \frac{2r^2 \cos AOD}{\text{sint}}\right)} = \sqrt{\left(50 - \frac{50\,.\,\cos 128^\circ\ 7'}{\text{sint}}\right)}.$$

Wenn dieser Ausdruck jetzt berechnet wird, so darf nicht vergessen werden daß, da $\angle 128^\circ\ 7'$ stumpf ist, der Cosinus, und daher auch das Glied $\frac{50\,.\,\cos 128^\circ\ 7'}{\text{sint}}$ negativ wird, weshalb es zu 50 hinzugethan werden muß; nun ist

*) Daß negative Größen keine Logarithmen haben, hat früher manchen Streit verursacht, die Sache ist aber dennoch so, nur mit dem wichtigen Zusatze: wenn die Basis des logarithmischen Systems eine positive Zahl ist, wie es der Fall beim Briggschen Systeme ist; dennoch schaden negative Größen in einer logarithmischen Rechnung nichts. Wie höchst wichtig es daher ist, sich mit dieser Eigenschaft genau bekannt zu machen, leuchtet ein, und leider vermissen wir das Gründliche hierüber, in den meisten mathematischen Werken. — Ein Mehreres hiervon an einem anderen Orte.

$$\log \frac{50 \cdot \cos 128^0\, 7'}{\sin t} = 1{,}4994415$$

und das Glied $\frac{50 \cdot \cos 128^0\, 7'}{\sin t} = 31{,}582$ folglich

$AD = \sqrt{(50 + 31{,}582)} = \sqrt{81{,}582} = 9{,}0322$ oder schlechtweg $= 9$. Wenn wir nun endlich diese verschiedenen Werthe in unsere Formel für das Viereck selbst setzen, so erhalten wir: Viereck ABCD

$$= \tfrac{1}{4}[7\sqrt{(100-49)} + 4\sqrt{(100-16)} + 8\sqrt{(100-64)} + 9\sqrt{(100-81)}]$$

$$= \tfrac{1}{4}(7\sqrt{51} + 4\sqrt{84} + 8\sqrt{36} + 9\sqrt{19})$$

$$= \tfrac{1}{4}(7 \cdot 7{,}14 + 4 \cdot 9{,}16 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 4{,}53)$$

$$= \tfrac{1}{4}(49{,}98 + 36{,}64 + 48 + 40{,}77) = \frac{175{,}39}{4} = 43{,}85 =$$ dem verlangten Inhalt des Vierecks.

Zusatz 1. Der Inhalt des zugehörigen Kreises ist 78,5 also größer wie das Viereck.

Anmerk. Wenn Prüfungen dieser Art, auch nicht ganz die Richtigkeit einer Rechnung bestätigen, so wird es doch immer dienlich seyn sie anzustellen, denn hätte man das Viereck größer als den Kreis gefunden, so wäre die Rechnung doch offenbar unrichtig gewesen.

Zusatz 2. Auf dieselbe Art kann nun der Inhalt eines jeden Polygons im Kreise gefunden werden, wenn nur der Radius des zugehörigen Kreises und die sämmtlichen Seiten weniger eine (die sich aus den übrigen Seiten von selbst ergiebt) gegeben sind. Die Formel bleibt ganz die hier gefundene, mit gehöriger Fortsetzung des Zählers in Hinsicht der übrigen Seiten; der Nenner bleibt 4. —

21ste Aufgabe.

Den Namen eines regulären Polygons zu berechnen.

Auflösung. So leicht und einfach die Lösung dieser Aufgabe auch aus den Formeln, die wir in der fünften und sechsten Aufgabe für die regulären Polygone gefunden haben, zu folgen scheint; so stellen sich dennoch Schwierigkeiten bei gegenwärtiger Aufgabe dar, die wohl so leicht

nicht zu überwinden sind. Sie liegen darin, daß aus einer Gleichung eine unbekannte Größe entwickelt werden soll, die einmal als Factor, und dann wieder als Divisor eines Winkels erscheint, dessen Sinus oder Cotangente auch in der Gleichung vorkommen, und daher auch unbekannt sind. Wir wollen, um dies näher zu beleuchten, die Formeln selbst betrachten. In der Formel der fünften Aufgabe haben wir gesehen, daß der Inhalt eines regulären n ecks $= \frac{n s^2 \cot v}{4 \sin t} = \frac{u^2 \cot . v}{4 n \sin t}$ sey, wenn nämlich s die Seite oder u den Umfang bedeutet, $\angle v$ aber ist so viel als $\frac{180^\circ}{n}$; daher unsere Gleichung wird

$$I = \frac{n s^2 \cot\left(\frac{180}{n}\right)}{4 \sin t} = \frac{u \quad . \cot\left(\frac{180}{n}\right)}{4 n \sin t}.$$

Es ergiebt sich hieraus

1) $\frac{4 I \sin t}{s^2} = n \cot\left(\frac{180}{n}\right)$ und 2) $\frac{4 I \sin t}{u^2} = \frac{\cot\left(\frac{180}{n}\right)}{n}$.

Wie aber aus jeder dieser Gleichungen, je nachdem nun I und s oder I und u gegeben sind, n zu entwickeln sey, — bleibt auf einem rein analytisch-trigonometrischen Wege, bis jetzt verborgen. — Alle Mühe bleibt vergebens, die unbekannte Größe n hier zu entwickeln, da sie keinesweges der Divisor der Cotangente oder des Sinusses, sondern des Winkels ist, dessen Cotangente oder Sinus genommen werden soll. Daß aber der Name eines regulären Polygons (n) aus dem Inhalte und der Seite, oder aus I und u bestimmt wird, ist leicht einzusehen, da jedes dieser Stücke mit n verbunden, das andere bestimmen. Wenn aber irgend ein Werth für n angenommen wird, so kann man allerdings sogleich finden, ob es der wahre ist, denn er muß, in die Gleichung eingeführt, auch eine Gleichung erzeugen. Dies scheint uns auf die Anwendung der Falsiregel bei dieser Aufgabe zu führen, allein auch von ihr

haben wir hier kein erwünschtes Resultat zu erwarten, (sie kann mit Vortheil bei der Entwickelung der Gleichung $a = x . \sin x$ angewendet werden, wo der bekannte trigonometrische Satz von den Differenzen der Logarithmen der Sinusse u. s. w. angewendet werden kann, wenn nämlich x eine Anzahl Grade seyn soll), weil n eine bloße unbekannte Zahl, und keine Anzahl Winkel bedeutet. — Nehmen wir nun die Formel für $I = \frac{n r^2 \sin 2v}{2 \sin t}$, wo $2v = \frac{360}{n}$ bedeutet, vor, so erhält man ebenfalls $\frac{2 I \sin t}{r^2} = n \sin\left(\frac{360^0}{n}\right)$ wo dieselbe Schwierigkeit ist.

Daß bei diesen Untersuchungen immer angenommen war, I sey eine der gegebenen Größen, versteht sich von selbst, denn wenn z. B. u und s gegeben sind, so ist $n = \frac{u}{s}$ wie leicht einzusehen, da $u = ns$ ist.

Wird aber I, u und r, oder s und r gegeben, so kann n entwickelt werden, denn: ist $AB = s$ und $OA = r$ (Fig. 9) gegeben, so hat man im Triangel AOC auch $AC = \frac{s}{2}$, daher $\sin AOC : \sin t = \frac{s}{2} : r$ und es ist $\sin AOC = \frac{\sin t . s}{2r}$, hieraus findet man $\angle AOC$, u. $\frac{180^0}{AOC} = n$, da $\angle AOB$ der ganze Centriwinkel, also $= \frac{360}{n}$ ist, und $AOC = \frac{180}{n}$. Wie man aber n findet, wenn I, u und r gegeben sind, folgt noch nicht hieraus, sondern wird so bewiesen. Aus I und u kann man das Apothema OC (Fig. 9) finden, indem dasselbe $= \frac{2I}{u}$ ist. Nämlich: es ist der Inhalt eines regulären Polygons im Kreise immer gleich einem Triangel, dessen Grundlinie der Umfang des Polygons u, und dessen Höhe das Apothema a ist, daher $I = \frac{ua}{2}$ und $\frac{2I}{u} = a = OC$. Hat man auf diese Art a berechnet, und ist r auch gegeben, so folgt aus $\triangle AOC$,

daß sich verhält: $\cos AOC : \sin t = a : r$, weshalb $\cos AOC = \frac{a \sin t}{r}$ ist, woraus $\angle AOC$ bestimmt wird, und mithin wieder $n = \frac{180}{AOC}$ folgt.

Bei den Bestimmungen der gegebenen Stücke dieser Aufgabe, kann man aber durchaus nicht willkührlich verfahren, selbst wenn man nur I und r oder I und s giebt, da man immer wagen würde, daß n eine vermischte Zahl oder wohl gar ein Bruch würde, was doch als Name eines Ecks unmöglich ist; daher müssen die Stücke durchaus so gegeben werden, wie sie sich bei einer Berechnung für I, aus n und r oder aus n und s ergeben haben, und ist gar I, n und r gegeben, so muß auch das dritte Stück erst besonders berechnet worden seyn. Dennoch hat man nur bei der genauesten Berechnung zu erwarten, daß das Resultat vollkommen eine ganze Zahl werde. Dasselbe ist auch nöthig, wenn r und s gegeben sind.

So steht es mit der Lösung dieser Aufgabe, die allerdings nur selten vorkommen wird, aber doch vorkommen kann, wenn man z. B. den Namen des regulären Polygons verloren hätte. — Mir ist durchaus keine Lösung dieser Aufgabe bekannt, die vielleicht auf einem ganz anderen Wege zu Stande kommen kann; z. B. wenn man den Inhalt des Polygons berechnen könnte, ohne den Winkel dabei zu gebrauchen u. s. w., doch scheint mir hierzu keine Aussicht zu seyn. Wenn es aber auch diese Aufgabe an und für sich nicht wäre, die die Lösung einer Gleichung wie $A = x \cdot \sin x$ (wo x eine bloß unbekannte Zahl seyn müßte), wünschenswerth machte, so kommen oft andere Fälle wo sie Nutzen gewähren könnte; und wenn es auch nur die Auflösung dieser Gleichung wäre, so würde die Theorie schon unendlich durch sie gewinnen. — Hoffnung, sollte ich glauben, wäre dazu da; denn Anfangs scheint es auch als sey die Gleichung z. B. $a = \sin\left(\frac{180}{x}\right)$ unauf-

lösbar, allein sucht man den Winkel dessen Sinus $= a$ ist, und findet ihn z. B. $= b^\circ$, so ist $\sin b^\circ = \sin\left(\frac{180}{x}\right)$ daher $b^\circ = \frac{180}{x}$ und $x = \frac{180}{b}$. —

Nun mag das hier Gesagte durch folgende Beispiele erläutert werden. Man habe $n = 9$ und $s = 12$, so ist $u = 9 \cdot 12 = 108$; $\angle v = \frac{180}{9} = 20^\circ$ und

$$I = \frac{n \cdot s^2 \cdot \cot v}{4 \operatorname{sint}} = \frac{9 \cdot 12^2 \cdot \cot 20^\circ}{4 \operatorname{sint}} = \frac{324 \cdot \cot 20^\circ}{\operatorname{sint}}.$$

Nun ist $\log 324 = 2{,}5105450$
$\log \cot 20^\circ = 10{,}4389341$
$12{,}9494791$
$\log \operatorname{sint} = 10{,}$
$2{,}9494791 = \log I,$

und I selbst $= 890{,}1826\ldots$ Ferner würde $r = \frac{6 \cdot \operatorname{sint}}{\sin 20^\circ}$ $= 17{,}542807\ldots$ ($\log r = 1{,}2440996$). Gesetzt also, es würde gegeben $s = 12$ und $r = 17{,}542807$, so ist (Fig. 9) $\sin AOC = \frac{\operatorname{sint} \cdot 12}{2 \cdot 17{,}542807}$ (wie wir gefunden haben).

Nun ist $\log \operatorname{sint} \cdot 12 = 11{,}0791813$
$\log 2 \cdot 17{,}542807 = 1{,}5451296$
subtrahirt $= 9{,}5340517$

dies ist genau der log sin 20°, daher $n = \frac{180}{20} = 9$ oder das Polygon ein 9eck.

Ferner: es sey $I = 890{,}1826$ so wie $u = 108$ und $r = 17{,}542807$ gegeben; so ist das Apothema $= \frac{2 \cdot 890{,}1826}{108}$ $= 16{,}48486$ (der log ist $= 1{,}2170853$). Nun ist $\cos AOC$ $= \frac{16{,}48486 \cdot \operatorname{sint}}{17{,}542807}$, welches $\log \cos AOC = 9{,}9729857$, was zu wieder $\angle 20^\circ$ gehört, und welcher $n = \frac{180}{20} = 9$ giebt.

Wird endlich die Formel: $\frac{4 I \operatorname{sint}}{s^2} = n \cot\left(\frac{180}{n}\right)$ genommen, und für $n = 9$ gesetzt, so muß dieser Werth

die Gleichung erfüllen, da ja I aus ihr berechnet ist. Wir wollen aber annehmen, man setze $n = 10$, so wird $\log \frac{4 I \sin t}{s^2} = \log \frac{4 . 890,1826 . \sin t}{144} = 11,3931766$; ferner wird $\log n . \cot \left(\frac{180}{n}\right) = \log 10 . \cot 18^\circ = 11,4882240$. Je größer nun n wird, je kleiner wird $\angle \frac{180}{n}$ und daher die Cotangente selbst größer, der Factor n selbst wächst auch, also wird, je größer man n annimmt, auch der Ausdruck $n . \cot . \left(\frac{180}{n}\right)$, deshalb auch sein Logarithmus größer; daher fällt auch dieser mit der Annahme von n; da wir nun eben mit der Zahl 11,4882240 einen zu großen Logarithmus erhielten, so entstand dies aus der zu großen Annahme von n; setzen wir aber $n = 8$, so wird

$$\log . n . \cot \left(\frac{180}{n}\right) = \log 8 . \cot . 22\tfrac{1}{2}^\circ = 11,2752381$$

also zu wenig, deshalb muß $9 = n$, und das Polygon ein Neuneck seyn.

Zusatz. So kann es also nicht fehlen daß, wenn man auch bei der ersten Annahme von n bedeutend von der Wahrheit abweicht, man dennoch bald den wahren Werth treffen muß, zumal da die erste Seite der Gleichung sich nicht ändert, und die zweite höchst einfach bei jeder neuen Annahme von n gefunden werden kann *).

*) Sollte sich irgendwo die vollkommene Lösung dieser Aufgabe finden, besonders in Rücksicht auf die zuletzt gedachte Formel, so würde man mich mit der Nachricht hierüber sehr erfreuen. —

V. Geometrische Aufgaben.

Diese geometrischen Aufgaben können als eine Fortsetzung der eben gehabten analytischen Aufgaben angesehen werden, indem ich zu ihrer Lösung auch größtentheils den analytischen Weg neben dem synthetischen einschlagen werde, um die Vortheile des analytischen Weges zu zeigen und zugleich, wie es leicht ist, nachdem die Formel für die Auflösung gefunden worden, die Construction und nach dieser den synthetischen Beweis zu geben. Aber dennoch unterscheiden sich diese Aufgaben wesentlich von den vorigen dadurch, daß sie alle ohne Trigonometrie gelöset werden, welche Behandlung ein Hauptcharacter der vorigen Aufgaben, mit geringer Ausnahme, war. —

1ste Aufgabe.

Gegeben der Umfang U und der Inhalt I eines gleichschenklichen Triangels; man sieht die Grundlinie und Höhe desselben.

Auflösung. Da man mit einem gegebenen Umfange, kein größeres Triangel als das gleichseitige begrenzen kann (siehe den Zusatz nach der dritten analytischen Aufgabe), so ist es möglich, daß diese Aufgabe unmöglich wird, in dem Falle nämlich, wo I größer als das gleichseitige Triangel ist, dessen Umfang U beträgt. Man stelle daher die Prüfung der Aufgabe folgendermaßen an: wenn S die Seite eines gleichseitigen Triangels ist, so ist dessen Inhalt $= \frac{S^2}{4}\sqrt{3}$; ist nun der Umfang $= U$, so ist die Seite $= \frac{U}{3}$, daher Inhalt $= \frac{U^2}{36}\sqrt{3}$. Wenn man diesen Ausdruck berechnet, so muß er nach dem eben Gesagten, größer als der gegebene I seyn, ist er kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich, und ist er ihm gleich, so ist das ver-

langte Triangel selbst ein gleichseitig △; ist die Aufgabe möglich, so kann U so groß seyn als man will, da man mit einem sehr großen Umfange, doch wenn man will, nur ein sehr kleines gleichschenkliches Triangel begränzen kann. Ist die Aufgabe nun möglich, so setze man die Höhe des verlangten Triangels $= x$, die Grundlinie $= y$ und eine der gleichen Seiten oder Schenkel $= s$, so hat man die beiden Gleichungen 1) $2s + y = U$ und 2) $\frac{x \cdot y}{2} = I$.

Aus der zweiten folgt $\frac{x^2 y^2}{4} = I^2$, und aus der Natur des gleichschenklichen Triangels, folgt

$$x^2 = s^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = s^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{4s^2 - y^2}{4};$$

daher wird $I^2 = \frac{x^2 y^2}{4} = \frac{4s^2 y^2 - y^4}{16}$.

Aus der ersten Gleichung folgt ferner: $s = \frac{U - y}{2}$, daher $s^2 = \frac{U^2 - 2Uy + y^2}{4}$ und $4s^2 = U^2 - 2Uy + y^2$; wird dieser Werth in den Ausdruck für I^2 gesetzt (nämlich für $4s^2$), so erhält man

$$I^2 = \frac{U^2 y^2 - 2Uy^3 + y^4 - y^4}{16} = \frac{U^2 y^2 - 2Uy^3}{16} \text{ und}$$

$$16 I^2 = U^2 y^2 - 2Uy^3.$$

Hier haben wir nun eine unreine cubische Gleichung, wo y die unbekannte Größe ist, und kann diese Gleichung auch so gesetzt werden $2Uy^3 - U^2 y^2 = -16I^2$ woraus wieder wird $y^3 - \frac{U^2 y^2}{2U} = \frac{-16 I^2}{2U} = y^3 - \frac{U y^2}{2} = \frac{-8I^2}{U}$.

Nun muß y so gewählt werden, daß es ein Theiler von $\frac{-8I^2}{U}$ wird. — Setzt man jetzt für U und für I erst ihre Werthe, so sey $U = 16$ und $I = 12$, so wird die obige Gleichung $y^3 - 8y^2 = -72$. Um die Probe nun nicht mit allen Theilern der Zahl 72 anzustellen, so setze man $y = 2m$, hiernach wird $y^2 = 4m^2$ und $y^3 = 8m^3$, weshalb aus jener Gleichung jetzt diese wird: $8m^3 - 32m^2$

$= -72$ und $m^3 - 4m^2 = -9$; da nun m ein Theiler von -9 seyn muß, so setze man $m = 3$, so wird $3^3 - 4 . 3^2 = 27 - 36 = -9$ wie es seyn muß; also ist $m = 3$ und $2m = 6 = y$; hieraus folgt $x = \frac{2 I}{y} = \frac{2 . 12}{6} = 4$.

Probe. Der Umfang ist $= 2s + y = 2 . 5 + 6 = 16$ (denn $s = \frac{U - y}{2} = \frac{16 - 6}{2} = 5$); ferner $I = \frac{x . y}{2} = \frac{4 . 6}{2} = 12$. Also ist die Aufgabe gelöset.

2te Aufgabe. (Fig. 14.)

Gegeben ein Halbkreis AMB und sein Durchmesser $d = AB$; man soll in einer am Endpunkte dieses Durchmessers errichteten Tangente BD, einen Punkt finden so, daß wenn man von ihm aus, nach dem anderen Endpunkte des Durchmessers eine Linie zieht, das Stück dieser Linie welches außerhalb des Kreises fällt, einer gegebenen Linie a gleich sey.

Auflösung. Man nehme an, der Punkt D sey der verlangte Punkt, so ziehe man die Linien DA und CB, und untersuche nun die Eigenschaften der ganzen Linie DA, wovon das Stück $DC = a$ seyn soll. Wüßte man nur das Stück AC, so wäre die Aufgabe auch gelöset, denn alsdann hätte man auch AD und hiermit die Linie BD. Aber wie sich leicht ergiebt, sind die Triangel ABD und ABC rechtwinklich, weshalb sich verhält: $AD : AB : AC$ d. h. $AC + a : d : AC$, hieraus folgt die Gleichung $AC^2 + a . AC = d^2$, daher auch $AC^2 + a . AC + \frac{a^2}{4} = d^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4 d^2 + a^2}{4}$ ist, hiernach ist $AC + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{(4d^2 + a^2)}}{2}$ und endlich $AC = \frac{\sqrt{(4d^2 + a^2)}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{(4d^2 + a^2)} - a}{2}$. Hiernach kann nun AC berechnet oder auch construirt werden, woraus sich wieder $AD = AC + a = \frac{\sqrt{(4d^2 + a^2)} + a}{2}$ ergiebt; DB kann nun abermals als $= \sqrt{(AD^2 - AB^2)}$

berechnet, oder durch einen Schnitt aus A mit AD bestimmt werden.

Zusatz 1. Um AD nach der Formel zu construiren, mache man d^2, nehme die Diagonale, so ist dieser Quadrat $= 2d^2$, und sie giebt daher wieder als Seite eines Quadrats genommen ein solches, wo das Quadrat der Diagonale $= 4d^2$ ist, wozu man nach dem Pythagoräischen Lehrsatze a^2 hinzu addiren kann, und so $4d^2 + a^2$ erhält, wo die Seite dieses Quadrats $= \sqrt{(4d^2 + a^2)}$ wird; addirt man abermals zu dieser Linie a, und nimmt von der neuen Linie die Hälfte, so hat man die Linie für den Ausdruck $\frac{\sqrt{(4d^2 + a^2)} + a}{2} = AD$.

Zusatz 2. Diese Aufgabe ist in jedem Falle möglich, da die Linie DC = Null und auch unendlich groß werden kann, wie eine Betrachtung der Figur leicht ergiebt.

3te Aufgabe. (Fig. 15.)

Es ist die Lage dreier Punkte A, B, C gegeben, man soll um sie als Mittelpunkte drei, sich wechselseitig berührende Kreise beschreiben.

Auflösung. Da die Kreise sich wechselseitig berühren sollen, so müssen ihre Mittelpunkte und die Berührungspunkte auch wechselseitig in gerader Linie liegen. Man verbinde daher die drei Punkte zum Dreieck ABC, so liegen die Berührungspunkte in den Seiten des Triangels. Hätte man nur einen von diesen Punkten, so wären auch, wie die Figur bei einiger Betrachtung zeigt, die übrigen Punkte bekannt. Man nenne die 3 Seiten des Triangels, die doch bekannt sind: $AC = a$, $AB = b$ und $BC = c$, ferner nenne man den Radius des Kreises um A, $= x$, so ist der des Kreises um B, $= b - x$, denkt man sich diesen auf die Linie BC aufgetragen, so ist der Rest der Linie BC noch $= c - (b - x) = c - b + x$; da auf die Linie AC aber von A aus, die Linie x aufgetragen ist, so bleibt von C aus auf der Linie AC noch der Rest

$a-x$, und dies ist der Radius des Kreises um C, der auch durch den Ausdruck $c-b+x$ bezeichnet war; daher haben wir jetzt die Gleichung $c-b+x=a-x$ woraus $x=\frac{a+b-c}{2}=\frac{a}{2}-\frac{(c-b)}{2}$ wird, und wonach die anderen Seiten sich leicht ergeben. Diese Formel führt nun auf folgende Construction.

Man suche die Differenz zwischen c und b, indem man aus B mit BA ($=b$) den Bogen AE beschreibt, so wird $EC=BC-BA=c-b$; diese Differenz halbire man in F, alsdann halbire man die Linie AC ($=a$) in G, und trage $\frac{CE}{2}=CF$ von G nach H oder subtrahire es von $\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$, so ist $AH=x$. Nun kann man die drei Kreise leicht beschreiben.

Synthetischer Beweis. Würde vorstehende Construction nicht auf dem analytischen Wege gefunden seyn (daher ihre Richtigkeit schon hieraus folgt und bewiesen ist), sondern wäre die Construction vorangeschickt, so müßte sie synthetisch bewiesen werden. Dies würde nun so geschehen. Laut Construction ist: $AO=AH=AG-GH$ $=CG-GH=CG+GH-2GH=CH-2GH$ $=CD-2GH=CD-CE=DE$ (weil nämlich $GH=\frac{CE}{2}$ gemacht war). Nun ist nur zu beweisen, ob auch $BO=BD$, d. h. ob, wenn man mit dem Reste der Linie AB oder mit BO einen Kreis beschreibt, dieser auch den Punkt D trifft. Es ist aber nach der Construction $BA=BE$, und eben fanden wir $AO=DE$, daher auch $BA-AO$ $=BE-DE$, d. h. $BO=BD$ seyn muß.

Zusatz 1. Wenn in unserem Ausdruck für x, der Werth $\frac{c-b}{2}=\frac{a}{2}$ würde, so wäre auch $c-b=a$, d. h. dann wäre die Differenz zweier Seiten eines Triangels gleich der dritten Seite, was nicht möglich ist, oder als-

dann lägen die drei Punkte A, B und C in gerader Linie, in welchem Falle also die Aufgabe unmöglich wird.

Zusatz 2. Wird aber das Glied $\frac{c-b}{2}$ negativ, wenn nämlich $c-b$ es wird, so muß man diese Hälfte zu $\frac{a}{2}$ hinzu addiren, welcher Fall z. B. eingetreten wäre, wenn man $CH = x$ gesetzt hätte, dann würde $AH = a - x = AO$ geworden seyn, folglich $BO = BA - AO = b - (a - x) = b - a + x$; aber CD wäre auch $= x$, daher $BD = BC - CD = c - x$; die Gleichung würde nun $b - a + x = c - x$ geworden seyn, wonach $x = \frac{c - b + a}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b - c}{2}$ wäre, und hier ist $b - a$ offenbar negativ; würde aber der Ausdruck $\frac{c-b+a}{2}$ so abgeändert worden seyn: $\frac{c}{2} - \frac{b-a}{2}$ so hätte man es wieder mit positiven Werthen zu thun.

Zusatz 3. Wenn die drei Punkte A, B und C nicht in gerader Linie liegen, so kann übrigens das Triangel ABC beschaffen seyn, wie es will, so ist die Aufgabe immer möglich; dies sagt die erhaltene Formel für x die sich immer muß construiren lassen, da des im ersten Zusatze angeführten Satzes wegen, das Glied $\frac{c-b}{2}$ immer kleiner als $\frac{a}{2}$ seyn muß, daher, gleichviel ob es von $\frac{a}{2}$ abgezogen oder hinzugethan wird, es nie $\frac{a}{2}$ übertreffen kann.

4te Aufgabe. (Fig. 16, 17 u. 18.)

Gegeben 2 Kreise SDM und IKL, in der Peripherie des einen ein Punkt G; man soll einen Berührungskreis zeichnen für beide Kreise, der den einen Kreis im Punkte G berührt.

Auflösung. Es kommt hier natürlich nur auf den Mittelpunkt des verlangten Kreises an, denn dessen Radius ist alsdann die Entfernung dieses Punkts vom Be-

rührungspunkte G; dies giebt aber umgekehrt zu erkennen, daß man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit dem Berührungspunkte G zu verbinden hat, wodurch man eine Linie erhält, in deren Verlängerung offenbar der verlangte Mittelpunkt liegen muß; dies sey die Linie CR. Nun muß in dieser Linie ein Punkt gefunden werden, der eben so weit von der Peripherie des zweiten Kreises (worunter man die Linie versteht, die verlängert nach dem Mittelpunkte geht) entfernt liegt, als vom Punkte G. — Trägt man den Radius des kleinern Kreises, vom Punkte G auf den des größeren Kreises, so daß $GF = BN$ wird, verbindet man ferner den Punkt F mit dem Mittelpunkte des kleineren Kreises B, halbirt die Linie FB in H, und errichtet in H den Perpendikel HC auf FB, so wird dieser da, wo er die Linie AR schneidet, in C den gesuchten Mittelpunkt geben.

Beweis. Es ist $\triangle CHF \cong \triangle CHB$ (zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich), daher $CF = CB$, da nun aber $GF = NB$ war, so wird auch $CF - GF = CB - NB$ seyn, d. h. $CG = CN$. Da nun auch C, N und B in gerader Linie liegen, so ist NPG der verlangte Berührungskreis.

Anmerk. 1. Wenn man die Punkte G und N verbindet, so hat man auch 2 congruente Triangel, aber da man den Punkt N noch nicht kannte, aber doch das Bedürfniß der gleichen Linien von C aus (welcher Punkt damals noch unbekannt war) hatte, so folgte wohl sehr einfach die Construction, daß man gleich lange Linien sich heran dachte, welche hier die Radien waren, indem man deren Endpunkte theils hatte, (Punkt B), theils leicht bestimmen konnte (wie den Punkt F). — Die mannigfaltigen Lagen, die bei dieser Aufgabe in Hinsicht der Kreise und des Punktes G statt finden können, erzeugen nun nothwendig folgende Zusätze.

Zusatz. 1. Da es bei der Lösung unserer Aufgabe, darauf ankam, daß die Linien AR und HC sich schneiden, so wird die Aufgabe unmöglich, wenn beide Linien parallel laufen; die Lage die der Punkt G in diesem Falle haben würde, wäre alsdann so zu bestimmen: man verbinde beide Mittelpunkte der Kreise A und B, halbire diese Central-linie in P und beschreibe den Halbkreis BQA aus P; von A aus schneide man diesen Halbkreis mit der Differenz beider Radien = AE, und verbinde nun A mit E, so wird die Verlängerung dieser Linie in der Peripherie den Punkt D bestimmen, der als Berührungspunkt gegeben, die Aufgabe unmöglich machen würde. Denn, wollte man nun gedachte Construction vollziehen, und den Radius BN von D auf DA auftragen, so träfe man den Punkt E, würde nun E mit B verbunden, und in der Mitte dieser Linie der bewußte Perpendikel errichtet, so würde er der Linie AD parallel laufen, denn ∠ AEB ist als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher auch dessen Nebenwinkel DEB, folglich wäre auch die Linie DE ein Perpendikel auf der Linie EB; also der Schnitt unmöglich.

Zusatz 2. Es liegt in der Peripherie des Kreises MGD noch ein zweiter Punkt, der die Aufgabe unmöglich macht; man erhält ihn, wenn man überhalb der Linie AB den Halbkreis und dieselbe Operation wie vorher macht. Hier würde S dieser Punkt seyn.

Zusatz 3. Ist der Berührungspunkt in der Peripherie des kleinen Kreises gegeben z. B. N, so verlängere man die Linie NB über den Mittelpunkt B hinaus, so daß NT gleich dem Radius des größeren Kreises wird, dann verbinde man T mit A, und errichte den Perpendikel in der Mitte der Verbindungslinie TA.

Zusatz 4. Um in der Peripherie des kleinen Kreises die Punkte zu finden, welche die Aufgabe unmöglich machen, beschreibe man wieder aus der Mitte der Centrallinie über ihr einen Halbkreis, und indem man diesen von B aus wieder mit der Differenz beider Radien schneidet in Z,

dann Z mit B verbindet, so giebt die Verlängerung dieser Linie rückwärts in L den verlangten Punkt, welches auf dieselbe Art gezeigt wird, wie im ersten Zusatze mit dem Punkte D. — Den zweiten Punkt in der Peripherie des kleinen Kreises, der die Aufgabe unmöglich macht, wird man ebenfalls so finden.

Zusatz 5. Sind die beiden gegebenen Kreise gleich, so wird man nur nöthig haben, die Centrallinie zu halbiren und in ihrer Mitte den Perpendikel zu errichten, bis er die verlängerte Verbindungslinie des gegebenen Berührungspunktes mit dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises, schneidet.

Zusatz 6. Um in diesem Falle die Punkte zu finden, welche die Aufgabe unmöglich machen, hat man blos nöthig in den Mittelpunkten der Kreise eine Senkrechte auf der Centrallinie zu errichten, bis diese die Peripherie schneidet, so ist hier der gesuchte Punkt.

Zusatz 7. Ist der Berührungspunkt gerade da gegeben, wo die Centrallinie die Peripherie schneidet, z. B. in U, so hat man nur die Linie UV (das Stück der Centrallinie, welches zwischen den Peripherien beider Kreise liegt) zu halbiren, so ist die Mitte der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und $\frac{UV}{2}$ der Radius.

Zusatz 8. Für alle Punkte, welche sich in dem Kreisbogen DUS befinden und als Berührungspunkte gegeben werden (der, wie leicht zu beweisen ist, kein Halbkreis seyn kann, sondern kleiner seyn muß), gilt die eben gemachte Auflösung. Wie ist es aber mit den Punkten, in dem Bogen DMS? Für diese gilt folgende Construction (Fig. 17). Es seyen die Kreise DGH und IQK, so wie der Punkt D als Berührungspunkt gegeben. Man verbinde A mit D, so liegt in dieser Linie oder in ihrer Verlängerung der verlangte Mittelpunkt. Wenn man ferner AD außerhalb des Kreises um DE = dem Radius des kleineren Kreises verlängert, jetzt E mit B verbindet, und in der Mitte F

der Verbindungslinie EB den Perpendikel FC errichtet, so giebt er bei seiner Schneidung mit der DA in C den gesuchten Mittelpunkt. — Um dies zu beweisen, verbinde man C mit B, so ist $\triangle ECF \cong \triangle BCF$ (weil $FE = FB$, FC gemeinschaftlich, und $\angle EFC = \angle BFE$ ist), daher $CE = CB$; da nun $DE = IB$ gemacht war, so ist auch $CD = CI =$ dem Radius des Berührungskreises DIK.

Zusatz 9. Wäre der Berührungspunkt in diesem Falle in der Peripherie des kleinen Kreises gegeben, so hätte man die Verbindungslinie desselben mit dem Mittelpunkte, ebenfalls außerhalb des Kreises, um den Radius des großen Kreises verlängern müssen, wo man alsdann den Punkt, welcher mit A verbunden werden muß, um den bewußten Perpendikel in der Mitte errichten zu können, erhalten hätte.

Zusatz 10. Wenn aber der Berührungspunkt in L gegeben wäre, d. h. in der Verlängerung der Centrallinie, so hätte man ML halbiren müssen, und würde so den gesuchten Mittelpunkt erhalten haben, und $\frac{ML}{2}$ zum Radius. (Vergleiche Zusatz 7.)

Zusatz 11. Wenn die beiden gegebenen Kreise in einander liegen, so bedarf es noch folgender Betrachtung: wenn (Fig. 18) BAC und DHP die beiden Kreise sind, und A der Berührungspunkt, so verbinde diesen mit dem Mittelpunkte des Kreises, in dessen Peripherie er gegeben ist, also mit Q, so muß in dieser Linie der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen; nun verlängere diese Verbindungslinie außerhalb des Kreises um AE gleich dem Radius des kleineren Kreises, verbinde E mit dem anderen Mittelpunkte O, halbire OE in F, wo ein Perpendikel auf OE errichtet, verlängert durch seinen Schnitt mit der OE in G den verlangten Mittelpunkt giebt. Dann: verbinde G mit O, so ist nur zu beweisen, daß $GA = GH$ ist, in welchem Falle ein Kreis aus G mit GA beschrieben, zu beiden Kreisen ein Berührungspunkt seyn wird;

da aber GO = GE (aus der Congruenz der beiden Triangel OGF und GFE folgend) und HO = AE gemacht, so ist auch GH = GA. Wie zu beweisen war.

Ist der Berührungspunkt aber in der Peripherie des kleinen Kreises gegeben, so scheint die Auflösung schwieriger zu seyn, doch bedenke man: wenn D der Berührungspunkt seyn soll, so verbinde man ihn wieder mit O, und verlängere die Linie OD außerhalb der Peripherie des kleinen Kreises, um DK gleich dem Radius des großen Kreises, verbinde wieder K mit Q, und errichte auf der Mitte dieser Linie in L den Perpendikel LN, der in N den gesuchten Mittelpunkt erzeugt. Denn: wenn man bedenkt, daß NQ = NK, und wenn man die Linie NQ rückwärts bis zur Peripherie des großen Kreises in B verlängert, daß auch QB = DK (indem DK = QB gemacht ist), so wird auch QB — NQ = DK — NK d. h. NB = ND seyn, daher ND der Radius und N der gesuchte Mittelpunkt.

Zusatz 12. Ist der kleine Kreis so gegeben, daß in ihm der Mittelpunkt des großen Kreises liegt, so bleibt die Auflösung ganz dieselbe, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Zusatz 13. Liegt der Berührungspunkt mit den beiden Mittelpunkten in gerader Linie, oder sind die gegebenen Kreise wohl gar concentrisch, so bedarf es kaum einer Erwähnung, wie die Auflösung nun geschieht.

Zusatz 14. Wäre der Berührungspunkt in P oder C gegeben, nämlich wo die Peripherien mehr zusammen kommen, so ist die Auflösung vollkommen dieselbe, da ja der Ort des Berührungspunktes, bei unserer vorigen Auflösung nichts weiter zur besonderen Lösung beitrug.

Zusatz 15. Sind die Kreise wie hier in einander gegeben, so kann die Aufgabe in keinem Fall, der Berührungspunkt mag liegen wo er will, unmöglich werden; denn dies könnte doch nur geschehen, wenn jener oft erwähnte Perpendikel sich mit der gedachten Verbindungs-

linie nicht schnitte, und dies ist wiederum nur möglich, wenn der Winkel der am Endpunkte der verlängerten Linie, durch die Verbindung dieses Punkts mit dem zweiten Mittelpunkte (wie K oder E), ein rechter Winkel wäre, und dies kann aus folgendem Grunde nie geschehen. Denkt man sich die Mittelpunkte beider Kreise durch eine gerade Linie verbunden, und nennt diese Linie die Centrallinie, so kann dieselbe höchstens nur die Differenz der Radien beider Kreise seyn (und dies nur alsdann, wenn beide gegebene Kreise sich von innen berührten), diese Linie liegt aber in den Triangeln OQK, OQE, dem Winkel gegenüber, von dem ich eben behaupte, er könne kein rechter Winkel seyn; denn könnte er dies seyn, so wäre die Centrallinie die größte Seite in diesen Triangeln, und das kann sie nicht seyn, weil eine in denselben, immer die Summe der beiden Radien ist (wie QE, OK laut Construction), und wir eben gesehen haben, was das Maximum der Centrallinie nur seyn kann. Deshalb kann auch der Winkel bei E und bei K noch viel weniger ein stumpfer Winkel seyn.

Anmerk. 2. Liegen die Kreise außer einander, wie im allerersten Falle, so fällt jener Grund mit der Centrallinie weg, daher die Aufgabe unmöglich werden konnte.

Zusatz 16. Schneiden sich die beiden gegebenen Kreise, oder berühren sie sich von innen oder außen, so wird man in jedem Falle die Construction leicht finden, wenn man das bis hieher Gesagte gehörig gefaßt hat.

Anmerk. 3. Ich übergehe daher diese Lösung hier, da ich schon fürchten muß, für manchen Leser zu weitläuftig gewesen zu seyn.

Anmerk. 4. Wohl schwerlich mögte man noch einen wesentlich neuen Fall dieser Aufgabe finden. Es sollte aber die Beleuchtung einer Aufgabe, in Hinsicht aller möglichen sowohl als unmöglichen Fälle, wie wir es hier thaten, nie vergessen werden.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

Bei jedem Vierecke BDFH um einen Kreis, ist die Summe zweier gegenüber liegenden Seiten, gleich der Summe der beiden anderen gegenüber liegenden Seiten.

Beweis. A, C, E und G seyen die Berührungspunkte der Seiten des Vierecks mit der Peripherie des Kreises. Nun ist bekannt daß, wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises z. B. von B zwei Tangenten zum Kreise fällt BA und BC, beide gleich lang sind, d. h. vom Punkte B bis zu den Berührungspunkten (weil $\triangle BOA \cong \triangle BOC$ ist, indem BO gemeinschaftlich, $OA = OC$ als Radien, und $\angle OAB = \angle OCB$ als rechte Winkel sind, daher die Triangel zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel, gleich haben). Aus demselben Grunde ist auch $DC = DE$, $FE = FG$ und $HA = HG$. Wird dies so gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} BC &= BA \\ DC &= DE \\ FG &= FE \\ HG &= HA \end{aligned}\right\} \text{ addirt, so erhält man}$$

$BC + DC + FG + HG = BA + DE + FE + HA$ d. h.

$$BD + HF = BH + DF.$$

Welches zu beweisen war. — Zieht man die Linien OB, OD, OF und OH, so werden durch diese die Winkel des Vierecks halbirt, welches aus der Congruenz der Triangel (von denen 2 oben erwähnt sind) folgt.

Anmerk. Ich führte diesen Lehrsatz hier an, weil er in den meisten mathematischen Werken fehlt, und die folgende Aufgabe sich auf ihn bezieht.

5te Aufgabe. (Fig. 19.)

Gegeben ein Viereck HBDF, wo die Summen der gegenüber liegenden Seiten wechselsweise einander gleich sind, man soll in dasselbe einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Halbire zwei beliebige Winkel des Vierecks z. B. B und D, und ziehe die Halbirungslinien,

bis sie sich im Punkte O schneiden, so ist dies der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und die Perpendikel von ihm auf die Seiten gefällt, sind die Radien.

Beweis. Es ist hier nur die Gleichheit der vier Perpendikel OE, OC, OA und OG zu zeigen, denn alsdann geht der Kreis aus O beschrieben, mit OE durch die Punkte E, C, A und G, und die Seiten des Vierecks werden Tangenten. — Nun ist $\triangle DEO \cong \triangle DOC$ (weil OD gemeinschaftlich, $\angle DEO = \angle DCO$ und $\angle EDO = \angle CDO$ ist), daher $OE = OC$; aus demselben Grunde ist auch $\triangle COB \cong \triangle BOA$, woraus folgt $OA = OC$ also auch $= OE$. Wenn nun der Kreis, welcher aus O mit OE beschrieben, und der jetzt durch die Punkte E, C und A gehen muß, auch durch den Punkt G ginge, so wäre die Aufgabe gelöset. Man nehme daher an, er ginge nicht durch G, sondern ginge wie APEC, so fälle man vom Punkte F zu ihm die Tangente FT, so wäre TBDF ein Viereck um einen Kreis, woraus folgte:

$$DF + BT = BD + TF \text{ (vorigen Lehrsatz).}$$

Es war aber $DF + BH = BD + HF$ gegeben; wird nun die erste dieser Gleichungen von der zweiten subtrahirt, so erhält man: $BH - BT = HF - TF$ d. h. $HT = HF - TF$, oder die Differenz zweier Seiten eines Triangels FTH wäre gleich der dritten Seite, welches unmöglich ist. Eben hierauf wird man stoßen, bei jeder angenommenen Lage des Kreises, die nicht die des Kreises ACEG ist, daher diese die einzig wahre nur seyn kann.

Anmerk. Die gegebene Auflösung folgt offenbar, aus dem zuletzt Gesagten des vorigen Lehrsatzes.

6te Aufgabe. (Fig. 20.)

Gegeben zwei Linien ab und pq, in der einen ein Punkt c, man soll in derselben Linie einen zweiten Punkt x finden so, daß wenn aus ihm als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben wird, derselbe durch den Punkt c geht, und die Linie ab eine Tangente zu ihm wird.

Auflösung. Man hat nur nöthig den Punkt x so zu bestimmen daß, wenn man von ihm auf die Linie ab einen Perpendikel fällt, derselbe gleich xc wird. — Wenn die beiden Linien ab und pq parallel laufen, oder verlängert senkrecht auf einander stehen, so ist die Auflösung so einfach, daß sie wohl hier keiner weitern Lösung bedarf. Wir nehmen daher ihre Lage gegen einander beliebig an. Man verlängere zu dem Ende beide Linien, bis sie sich im Punkte m einander schneiden; hier errichte man auf der Linie ab (d. h. auf der, worin der Punkt c nicht gegeben ist), den Perpendikel $mn = mc$, verbinde n mit c, so wird sich in der Linie ab ein Punkt d ergeben, von welchem behauptet wird, daß ihn der Perpendikel von dem gesuchten Punkte x auf die ab gefällt, treffe, weshalb umgekehrt der Perpendikel in d auf ab, in der Linie pq den Punkt x erzeugen muß.

Beweis. Es ist jetzt zu zeigen, daß $dx = xc$ ist. Wenn man die Triangel cxd und cmn betrachtet, so sind sie ähnlich, weil dx ‡ nm läuft (indem beide Perpendikel auf ab sind); daher verhält sich $cm : mn = cx : xd$; da nun $cm = mn$ ist, so wird auch $cx = xd$ seyn. Wie zu beweisen war. Man kann nun aus x mit xc den Kreis beschreiben, welcher den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge leistet.

7te Aufgabe. (Fig. 21.)

Es ist ein Kreis gegeben, man soll in ihn drei Kreise verzeichnen, welche sich unter sich und den großen Kreis berühren.

Anmerk. Ich werde auch diese Aufgabe auf mehrere Arten lösen, indem sich hier sehr interessante Betrachtungen darbieten, welche die Vortheile des analytischen Weges zeigen.

Analytische Auflösung. Man stelle sich vor, die Aufgabe sey gelöset, und untersuche die Verhältnisse und Verbindungen der gegebenen und der sich ergebenden

Stücke, woraus alsdann die Construction umgekehrt folgen muß. Um aber drei Kreise zu erhalten, die von gleicher Größe sind, sich wechselseitig berühren und alle von einem größern Kreise berührt werden in welchem sie sich befinden, verfahre man folgendermaßen. Man construire ein gleichseitiges Triangel q a s, und indem man eine Seite z. B. die a s in z halbirt, so beschreibe man aus den 3 Winkelspitzen des Dreiecks mit a z die drei kleinen Kreise welche sich wechselseitig berühren müssen. Sucht man jetzt den Mittelpunkt o des Triangels a q s (den man durch Fällung zweier Perpendikel, von den Winkelspitzen auf die gegenüber liegenden Seiten erhält, wie die Figur giebt), und beschreibt aus ihm mit o t (welche Linie man durch die Verlängerung der Linie o s bis zur Peripherie in t erhält) den großen Kreis, so wird er die drei kleinen Kreise in t, c und n berühren, weil o t = o c = o n und die Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte in gerader Linie liegen. Wenn man überdies die Punkte c, t und n zum Triangel verbindet, so ist auch dieses neue Triangel c t n gleichseitig, indem $\Delta oct \cong \Delta con \cong \Delta not$ ist (weil zwei Seiten als Radien und die eingeschlossenen Winkel um o gleich sind), daher die Seiten c t, t n und n c gleich seyn müssen.

Diese Construction also, die zugleich die Möglichkeit unserer Aufgabe zeigt, jetzt vorausgesetzt; so haben wir nur nöthig uns umgekehrt vorzustellen, daß wir in den, nunmehr als gegeben angenommenen großen Kreis, das gleichseitige Triangel n t c auf die bekannte Weise beschrieben, und von seinen Winkelspitzen auf die gegenüber liegenden Seiten die Perpendikel c p, t m und n d gefällt hätten; und es ist jetzt nur nöthig, den Radius c a eines der kleinen Kreise zu bestimmen, aus dem Radius o c des großen Kreises und c t der Seite des gleichseitigen Triangels. Nenne c a = x, so wird folgende Proportion richtig seyn: $oc : oa = cd : az$, denn es laufen die Seiten des Triangels a s q wechselsweise parallel mit denen des

Triangels ctn (weil $oc = ot = on$ und $oa = os = oq$). Nun ist oc als Radius des gegebenen Kreises bekannt, oa ist $= oc - ac = oc - x$, cd ist $= \frac{ct}{2}$ also auch bekannt und $az = x$, indem diese Linie auch Radius des kleinen Kreises ist. Diese Werthe in die obige Proportion substituirt, so wird dieselbe jetzt diese: $oc : oc - x = cd : x$; hieraus entsteht folgende neue Proportion: $(oc + cd) : cd = oc - x + x : x$ d. h. $(oc + cd) : cd = oc : x$; aus dieser Proportion folgt nun der Werth für x durch Construction oder Berechnung, indem die drei ersten Glieder bekannt sind. Also ist $x = \frac{cd \cdot oc}{oc + cd}$, und will man den Werth für oa haben, so ist dieser $oa = oc - ac = oc - \frac{cd \cdot oc}{cd + oc} = \frac{cd \cdot oc + oc^2 - cd \cdot oc}{cd + oc} = \frac{oc^2}{cd + oc}$. Die Fortsetzung der Construction würde, nachdem man die Perpendikel cp, tm und nd gefällt hätte, nun diese seyn: suche die vierte Proportionallinie zur Summe von $oc + cd$ als erstes Glied, cd als zweites und oc als drittes Glied, so ist dieses der Radius eines der kleinen Kreise, den man nur von c auf cp nach a zu tragen hat, wo sodann aus a beschrieben, sich der erste Kreis, und auf gleiche Weise die anderen Kreise ergeben.

Hierdurch ist also die Aufgabe vollkommen gelöset und auch bewiesen; aber wir können uns vorstellen, die Construction sey nicht von uns gefunden sondern gegeben, so haben wir nun folgenden Beweis.

Synthetischer Beweis. Nachdem man die, auf vorgeschriebene Weise gefundene Linie x, von den Punkten c, t und n auf die Perpendikel getragen hat, und zwar nach a, s und q, so verbinde man diese Punkte zum Triangel asq, und es bleibt nur zu zeigen übrig, daß die Linie ac auch die Hälfte jeder der Seiten des Triangels asq ist, denn wäre dies, so müßten die aus a, s und q beschriebenen Kreise sich wechselseitig berühren. Zuerst

muß aber noch bewiesen werden, weshalb Δasq gleichseitig ist; dies folgt nun daraus, daß $oc = ot = on$ (aus den Eigenschaften des gleichseitigen Triangels hergeleitet), ferner weil $ac = sq = qn$ und daher auch $oa = os = oq$ sind, deshalb sich verhält $oa : ac = os : st$ woraus $as \mathrel{\#} tc$ folgt, eben so $sq \mathrel{\#} tn$ und $qa \mathrel{\#} nc$; indem nun Δctn gleichseitig ist (nach der Construction), so ist dies auch beim Δasq der Fall. Um nun zu zeigen, daß $ac = \frac{as}{2}$ ist, schließe man: $oc : oa = ct : as$; für oa kann man setzen $\frac{oc^2}{cd + oc}$ und für $ct = 2cd$, daher $oc : \frac{oc^2}{cd + oc} = 2cd : as$, woraus $as = 2 . \frac{oc^2 . cd}{(cd + oc) oc}$ $= 2 . \frac{oc . cd}{cd + oc}$ folgt, und daher $\frac{as}{2} = az = \frac{oc . cd}{cd + oc}$ ist, welchen Werth auch die Linie ac laut Construction hat. Hierdurch ist bewiesen was nur zu beweisen war.

Zweite Auflösung. Durch Anwendung der 6ten Aufgabe, erhalten wir nun nachfolgende Auflösung. Wenn der Kreis gegeben, in welchen die drei kleineren Kreise beschrieben werden sollen, so verzeichne man in ihn das gleichseitige Triangel nct, und fälle von den Winkelspitzen die Perpendikel auf die gegenüber liegenden Seiten; so ist es nur nöthig, in der Linie no einen Punkt q zu bestimmen, so daß ein Kreis aus ihm mit qn beschrieben, von der Linie tm berührt werde; hat man diesen Punkt und mithin die Linie nq gefunden, so bestimmt diese, von den Punkten t und c auf tm und cp getragen, die Mittelpunkte der anderen beiden Kreise eben so gut. Diese eben erwähnte Aufgabe ist aber genau die sechste Aufgabe, und man hat nur nöthig hier in o auf mo einen Perpendikel $= on$ zu errichten, dessen zweiter Endpunkt mit n verbunden, in der Linie mo den Punkt u bestimmt, wo der Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit der Linie tm seyn muß, und woraus man wieder durch einen hier er-

richteten Perpendikel den Punkt q als gesuchten Mittelpunkt in der no erhält.

Anmerk. Soll ca nach der ersten Auflösung blos berechnet werden, so hat man erst ct zu berechnen, was aus dem △cot, wo die beiden Seiten oc = ot als Radien des gegebenen Kreises und ∠cot = 120° gegeben sind, leicht geschehen kann.

8te Aufgabe. (Fig. 22, 23, 24, 25 u. 26.)

Es sind zwei Linien gegeben, die eine begrenzt die andere unbegrenzt; man soll den Mittelpunkt eines Kreises finden, von dem die begrenzte Linie Sehne und die unbegrenzte Tangente ist.

Auflösung. Die mannigfaltigen Lagen, welche die begrenzte Linie, die wir AB nennen wollen, gegen die unbegrenzte, die CD heißen mag, haben kann, machen folgende Fälle dieser Aufgabe.

Erster Fall. (Fig. 22.) Die Linie AB steht senkrecht in A auf der CD. Halbire AB in O, so ist AO der Halbmesser des verlangten Kreises AEF.

Zweiter Fall. (Fig. 23.) Die Linien AB und CD laufen parallel. — Da AB Sehne des Kreises seyn soll, so halbire man diese Linie in O, so muß in dem Perpendikel EF den man in dieser Mitte auf AB errichtet, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen. Da nun CD ‡ AB, so steht auch EF senkrecht auf CD, und da CD Tangente werden soll, so muß G der Berührungspunkt seyn (diese Sätze müssen natürlich aus der Kreislehre bekannt seyn). Es kommt nun darauf nur an, in der Linie EF einen Punkt zu finden, der gleich weit von G und von A ist, indem jeder Punkt in der EF schon gleich weit von A und von B ist. Deshalb verbinde man G mit A, halbire GA in I und errichte hier den Perpendikel IH bis er in H die EF schneidet, so ist H der gesuchte Mittelpunkt, indem △HIA ≅ △HGI ist (zwei Seiten und

der eingeschlossene Winkel in beiden gleich), weshalb HA = HG = HB ist. Wie verlangt war.

Dritter Fall. (Fig. 24.) Die Linie AB steht in ihrer Verlängerung senkrecht auf CD in L. — Man halbire AB in K, so liegt in dem hier auf AB errichteten Perpendikel GF der gesuchte Mittelpunkt. Jetzt schneide man aus dem Punkte A mit der Linie KL den Perpendikel GF in O, so ist O der gesuchte Mittelpunkt; denn indem $\triangle OAK \cong \triangle OBK$ ist, muß auch OA = OB = KL seyn; fällt man nun von O auf CD die Senkrechte OH, so ist diese auch gleich KL = AO (weil LKOH ein Parallelogramm ist), deshalb ist H der Berührungspunkt.

Vierter Fall. (Fig. 25.) Die Linie AB werde in ihrem Endpunkte A von der CD getroffen. — Zuerst wird wieder AB in E halbirt, und der Perpendikel GF hier errichtet; dann errichte man, da A der Berührungspunkt seyn muß, in A auf DC den Perpendikel AH, wo dieser den Perpendikel GF in O schneidet, wird der gesuchte Mittelpunkt seyn. Es ist nämlich, aus der Congruenz der Triangel AEO und BEO folgend, OA = OB; und DC Tangente, weil $\angle$ DAO ein rechter Winkel ist.

Anmerk. 1. Daß sich die beiden Linien AB und CD nicht in einem anderen Punkte der AB, als in ihrem Endpunkte schneiden dürfen, folgt aus der Natur der Sehne und der Tangente, wovon Erstere ganz innerhalb, und Letztere ganz außerhalb des Kreises liegen muß, daher der gemeinschaftliche Punkt beider, höchstens der Endpunkt der Sehne (denn die Tangente ist hier unendlich lang) seyn kann. Aus demselben Grunde mußte, im vierten Falle, A der Berührungspunkt seyn.

Fünfter Fall. (Fig. 26.) Die Linien AB und LK (es mag hier LK die unbegrenzte Linie heißen) bilden bei ihrer Verlängerung einen willkührlichen Winkel KDB. — Dieser Fall ist ungleich schwieriger als die früheren, und ich gebe deshalb von ihm folgende:

Analytische Auflösung. Man verlängere beide Linien bis zu ihrem Zusammentreffen in D. Dann halbire man die AB in C, so muß auch diesmal in dem, hier auf der AB errichteten Perpendikel FH der gesuchte Mittelpunkt liegen. Man nehme an G sey derselbe, so ist nicht nur $GA = GB$, sondern wenn man von G auf die LK den Perpendikel GE fällt, so muß auch dieser $= GA$ seyn. Wie aber den Punkt G finden? Wenn man nur den Punkt E hätte, so wäre dies eben so gut, — oder nur die Linie DE müßte bekannt seyn. — Man ziehe DG, so sind die Triangel DGC, DGE, AGC u. s. w. rechtwinklich, und solche Triangel sind allerdings die bequemsten zur Berechnung. Man fange nun an zu sagen: $DE^2 = DG^2 - EG^2$; $DG^2 = DC^2 + CG^2$ und $EG^2 = AG^2 = AC^2 + CG^2$, deshalb wird seyn
$DE^2 = DC^2 + CG^2 - AC^2 - CG^2 = DC^2 - AC^2 = (DC + AC) \times (DC - AC)$*) $= (DC + CB) \times (DC - AC) = DB . DA$. Ist aber $DE^2 = DB . DA$, so folgt die Proportion: $DB : DE = DE : DA$ d. h. die unbekannte gesuchte Linie DE, ist die mittlere Proportionallinie zwischen der DB und der DA. Hieraus nun folgt folgende

Construction. Nachdem man den Perpendikel FH in der Mitte der AB auf AB errichtet hat, verlängere man beide Linien AB und LK, bis sie sich in den Punkt D schneiden. Nun halbire man die ganze DB in O, und beschreibe aus O mit OB den Halbkreis BID; errichte ferner in A den Perpendikel AI bis zur Peripherie, und ziehe DI, so ist diese Linie DI die mittlere Proportionallinie zwischen DB und DA, welche gesucht wurde**), und die daher auf DE aufgetragen, den Punkt

---

*) Weil die Differenz zweier Quadrate gleich einem Product aus der Summe und Differenz der beiden Wurzeln ist;
$$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b).$$

**) Wenn man I mit B verbindet, so ist das Triangel DIB rechtwinklich, weil der Winkel DIB ein Winkel im Halbkreise ist.

E giebt, woraus wieder mittelst einer Senkrechten in E auf DK, der Mittelpunkt G sich ergiebt.

Um auch bei dieser Aufgabe nichts zu wünschen übrig zu lassen, so folgt noch folgender

Synthetischer Beweis. Nachdem die eben erwähnte Construction vollzogen ist, bleibt nur blos zu beweisen übrig, daß der Perpendikel $GE = GH$ ist, denn GA ist schon gleich GB. Daß dies blos aus der Annahme, $DE = DI$ sey die mittlere Proportionallinie zwischen DB und DA, bewiesen werden muß, versteht sich von selbst. — Man ziehe DG (welche Linie aus der gegebenen Construction nicht folgt, sondern von der vorigen analytischen Auflösung herrührt), so sind $\triangle DEG$ und DCG rechtwinklich, deshalb $GE^2 = GD^2 - ED^2$ und weil $GD^2 = DC^2 + CG^2$, so ist $GE^2 = DC^2 + CG^2 - ED^2$. Nun ist $DC = DA + AC$, folglich
$GE^2 = CG^2 + (DA + AC)^2 - ED^2$. Zufolge der Construction ist aber $ED^2 = DI^2 = DB.DA = (DA + AB)DA$ $= (DA + 2AC)DA = DA^2 + 2AC.DA$; deshalb wird jetzt:

$$GE^2 = CG^2 + (DA + AC)^2 - ED^2$$
$$= CG^2 + DA^2 + 2DA.AC + AC^2 - DA^2 - 2AC.DA$$
$$= CG^2 + AC^2.$$

Weil nun Triangel ACG rechtwinklich ist, so ist auch $CG^2 + AC^2 = AG^2$, daher $GE^2 = AG^2$, woraus $GE = AG$ folgt. Welches zu beweisen war. —

Anmerk. 2. Daß bei der analytischen Auflösung alles angewandt werden müßte, die unbekannte Linie DE durch DA, AB oder DB auszudrücken, läßt sich leicht einsehen, weil dies ja die einzigen bekannten Linien, in Hinsicht ihrer Grenzen sind.

Anmerk. 3. Es mögte sich wohl schwerlich ein 6ter Fall, der ein wesentlich neuer wäre, für diese Aufgabe finden lassen.

Daß nun $DB : DI = DI : DA$, folgt aus der Lehre von der Aehnlichkeit.

9te Aufgabe. (Fig. 27.)

Um den Mittelpunkt C sind zwei concentrische Kreise dba und TV beschrieben (vom letzteren Kreise hier nur ein Bogen); in der Peripherie jedes Kreises bewegt sich ein Punkt, vom Punkte C aus gesehen, von der rechten Hand gegen die linke; der Punkt im kleinen Kreise vollendet den Kreis in einer unbekannten Zeit, der Punkt im großen Kreise in der bekannten Zeit I; wenn nun der Punkt des großen Kreises sich in T befindet, so ist der des kleinen Kreises in m d. h. mit T und C in gerader Linie; der Punkt m rückt jetzt vor, und wenn der Punkt T in V angekommen ist, ist m nach der Vollendung eines ganzen Kreises schon wieder bis n vorgerückt, d. h. abermals mit V und C in gerader Linie; nun ist der Bogen TV in Z Zeit vollendet, und es fragt sich: wie viel Zeit der Punkt des kleinen Kreises zur Vollendung eines Umlaufs braucht.

Auflösung. Der Bogen mn welchen der Punkt des kleinen Kreises über einen Kreis vollendet, ist dem Bogen TV ähnlich, deshalb suche man die Grade des Bogens TV, indem man schließt: $I : Z = 360^\circ : x^\circ$, und x ist $= \frac{360 . Z}{I}$; so groß ist also auch der Bogen mn, welcher zur Peripherie des kleinen Kreises hinzuaddirt, den Bogen mbadn $= 360^\circ + \frac{360\,Z}{I} = \frac{360\,I + 360\,Z}{I} = \frac{360\,(I + Z)}{I}$ giebt. Wenn also der Punkt des kleinen Kreises, diesen Bogen in derselben Zeit vollendet, wo der Bogen TV beschrieben ist, so ist dies auch Z Zeit, und man kann wieder sagen: wenn dieser Bogen in Z Zeit vollendet wird, in wie viel Zeit werden nur 360 Grade, oder ein einmaliger Umlauf vollendet; dies giebt folgenden Ansatz: $\frac{360\,(I + Z)}{I} : 360 = Z :$ unbekannten Zeit, diese ist daher

$= \frac{360 . Z}{\frac{360 (I + Z)}{I}} = \frac{360 Z . I}{360 (I + Z)} = \frac{Z . I}{(Z + I)}$; offenbar eine sehr einfache Formel.

Zusatz 1. Wenn aber der Punkt des kleinen Kreises, sich in entgegengesetzter Richtung bewegt hätte, d. h. indem der Punkt des großen Kreises von T bis V rückt, hätte er nur den Bogen mabn (also noch keinen ganzen Kreis) vollendet; welcher Ausdruck würde nun wenn I und Z unverändert bleiben, den Umlauf angeben? — Offenbar die Formel $\frac{Z . I}{(I - Z)}$, — denn der Bogen mabn ist ja jetzt nur

$$360° - mn = 360° - \frac{360 Z}{I} = \frac{360 (I - Z)}{I} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 2. Hätte aber der Punkt des großen Kreises die entgegengesetzte Bewegung gehabt, also den Bogen durchlaufen, dessen Supplement der Bogen TV ist, und welchen wir THV nennen wollen (die Figur zeigt ihn nicht weiter), der Punkt des kleinen Kreises aber seine Richtung behalten und wieder den Bogen mbamn durchlaufen; wie würde jetzt die Formel lauten? — Der Ausdruck für den Bogen THV ∾ mabn wäre auch jetzt noch $= \frac{360 Z}{I}$, daher der Bogen TV ∾ mn $= 360° - \frac{360 Z}{I} = \frac{360 (I - Z)}{I}$; wird dieser Bogen zu 360° addirt, so erhält man den Bogen mban $= 360 + \frac{(360 I - Z)}{I} = \frac{360 (2 I - Z)}{I}$; schließt man nun wieder: $\frac{360 (2 I - Z)}{I} : 360 = Z$: unbekannten Zeit, so wird dieselbe $= \frac{I . Z}{2 I - Z}$.

Zusatz 3. Endlich sey die Bewegung sowohl im großen als im kleinen Kreise, der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt, daher wieder beide nach derselben Richtung; der Punkt im kleinen Kreise vollende jetzt durch sein

Voreilen den Kreis mabm und überdies noch den Bogen mabn; wie wird nun die Formel werden? — Sie wird wieder ganz die zuerst erhaltene Formel $\frac{I.Z}{(I+Z)}$ werden, weil der Ausdruck für den Bogen THV ∞ mabn wieder $\frac{360\,Z}{I}$ wird, und der Gang der Rechnung durchaus derselbe ist wie dort.

Anmerk. 1. Es bleibt die Aufgabe ganz dieselbe, wenn man sich den ganzen Kreis mba um seinen Mittelpunkt sich drehend denkt, und den Punkt m als einen festen Punkt annimmt. Bedeutet nun z. B. jener kleine Kreis den Durchschnitt der Sonnenkugel und m ist ein Sonnenfleck, TV aber einen Theil der Erdbahn, so kann man aus der Zeit, wo die Erde sich von T bis V bewegt, wenn man in diesen beiden Punkten einen Fleck gerade mitten auf der Sonnenscheibe beobachtet hat, die Drehung der Sonne um ihre Achse finden, wenn man die Richtung der Bewegung des Flecks (nach der rechten oder linken Hand von der Sonne aus gesehen) kennt, welche so ist, wie unsere erste Auflösung sie annahm. Die Zeit I ist alsdann unser Jahr, und Z die Zwischenzeit der Beobachtungen; wenn diese Zeit nun z. B. $27\frac{1}{5}$ Tage wäre, und $I = 365\frac{1}{4}$ angenommen würde, so gäbe die Formel

$$\frac{I\,Z}{(I+Z)} = \frac{\frac{80355}{8}}{\frac{1571}{4}} = \frac{80355}{3142} = 25{,}8 \text{ Tage}$$

oder 25 Tage und etwa 19 Stunden für jene Umwälzung der Sonne.

Anmerk. 2. Daß diese Angaben, so wie unsere ganze Rechnung, nur runde Zahlen angeben, die bei wirklichen Beobachtungen kleine Aenderungen erleiden, muß, zur Vermeidung von Mißverständnissen, erwähnt

werden; das Nähere hierüber zu sagen, ist hier der Ort nicht.

10te Aufgabe. (Fig. 28.)

In einem Kreise EGF ist ein zweiter Kreis DHK gegeben, der den ersten im Punkte L berührt; man verlangt zwei Kreise von gleicher Größe, noch innerhalb des großen Kreises zu construiren, die sich unter sich und beide gegebene Kreise berühren.

Auflösung. Da die beiden verlangten Kreise von gleicher Größe seyn sollen, so müssen sie offenbar zu beiden Seiten des Durchmessers LN (für den großen gegebenen Kreis, der zugleich durch den Mittelpunkt des kleinen Kreises geht) liegen, wegen der hier befindlichen congruenten Flächen. Aber, da sich die beiden Kreise auch unter sich berühren sollen, so müssen sie wieder beide den Durchmesser LN zur gemeinschaftlichen Tangente haben, da sich sonst kein Punkt angeben läßt, den sie gemeinschaftlich haben könnten. Wir brauchen aber wegen der Gleichheit der beiden Kreise, nur einen zu betrachten, und dies sey der als bereits gefunden angenommene Kreis CED. Nun suche man die Lage des Mittelpunkts zu bestimmen, so hat man alles. Denkt man sich diesen Punkt Q mit den Mittelpunkten B und A der gegebenen Kreise verbunden, und verlängert die Linie BQ bis E, so sind die Punkte E und D die Berührungspunkte, und $EQ = QD$ = dem unbekannten Radius, der x heißen mag; fällt man nun noch von Q auf NL den Perpendikel QC, so ist auch dieser $= QD = x$, da ja LN ein Tangente seyn muß.

Es kommt jetzt alles auf den Punkt C in der Linie LN, und auf den Radius x an; bekannt ist uns nichts weiter als der Radius des großen Kreises BE den wir R, der des kleinen Kreises der r, und die Entfernung der beiden Mittelpunkte von einander d. h. BA die wir

d nennen wollen; zu bestimmen sind hieraus BC die y heißen mag, und x.

Aus der Natur berührender Kreise folgt nun, daß $AQ = AD + DQ = r + x$, $BQ = BE - QE = R - x$ ist. Wenn man jetzt die beiden rechtwinklichen Triangel AQC und BQC betrachtet, so lassen sich folgende beide Gleichungen bilden: 1) $BC^2 = BQ^2 - QC^2$, oder $y^2 = (R - x)^2 - x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 - x^2 = R^2 - 2Rx$. 2) $AC^2 = AQ^2 - QC^2$, oder $(d + y)^2 = (r + x)^2 - x^2$ d. h. $d^2 + 2dy + y^2 = r^2 + 2rx + x^2 - x^2 = r^2 + 2rx$. Wird hiervon die erste Gleichung subtrahirt, so bleibt die neue Gleichung: 3) $d^2 + 2dy = r^2 + 2rx - R^2 + 2Rx$. Aus dieser Gleichung den Werth von x entwickelt, erhält man $x = \frac{d^2 + 2dy + R^2 - r^2}{2(R + r)}$. Aus der ersten Gleichung aber, wird der Werth für $x = \frac{R^2 - y^2}{2R}$ gefunden; setzen wir nun diese beiden Werthe für x einander gleich, so erhalten wir: $\frac{d^2 + 2dy + R^2 - r^2}{2(r + R)} = \frac{R^2 - y^2}{2R}$ hieraus wird nun $2d^2R + 4dyR + 2R^3 - 2Rr^2 = 2rR^2 - 2ry^2 + 2R^3 - 2Ry^2$ Wird von beiden Seiten $2R^3$ subtrahirt, und die ganze Gleichung durch 2 dividirt, so erhält man

$$d^2R + 2dyR - Rr^2 = rR^2 - ry^2 - Ry^2.$$

Werden alle Größen die y enthalten auf die linke, die bekannten Größen auf die rechte Seite der Gleichung geschafft, so wird dieselbe folgende:

$$Ry^2 + ry^2 + 2dyR = rR^2 - d^2R + Rr^2$$

$$(R + r)y^2 + 2dyR = (rR - d^2 + r^2)R$$ hieraus wird

$$y^2 + \frac{2dyR}{R + r} = \frac{(rR - d^2 + r^2)R}{R + r}.$$

So sind wir auf die allgemeine Formel der unreinen quadratischen Gleichungen gekommen, nach deren Theorie aus dieser Form, nun folgende wird:

$$y^2 + \frac{2dyR}{R+r} + \frac{d^2R^2}{(R+r)^2}$$

$$= \frac{(rR - d^2 + r^2)\,R}{R+r} + \frac{d^2R^2}{(R+r)^2}$$

$$= \frac{(rR - d^2 + r^2)\,(R+r)\,R}{(R+r)\,(R+r)} + \frac{d^2R^2}{(R+r)^2}$$

$$= \frac{rR^3 - d^2R^2 + r^2R^2 + r^2R^2 - d^2rR + r^3R + d^2R^2}{(R+r)^2}$$

$$= \frac{rR^3 + 2r^2R^2 - d^2rR + r^3R}{(R+r)^2}$$

$$= \frac{rR^3 + 2r^2R^2 + r^3R}{(R+r)^2} - \frac{d^2rR}{(R+r)^2}$$

$$= Rr - \frac{d^2rR}{(R+r)^2}$$

Wird auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, so bekommt man:

$$y + \frac{dR}{(R+r)} = \sqrt{\left(Rr - \frac{d^2rR}{(R+r)^2}\right)} \text{ und endlich ist}$$

$$y = \sqrt{\left(Rr - \frac{d^2rR}{(R+r)^2}\right)} - \frac{dR}{(R+r)}.$$

Hiernach kann nun auch x berechnet werden.

Zusatz 1. Es sey $R = 3$ und $r = 2$, so wird der Ausdruck für

$$y = \sqrt{\left(3.2 - \frac{1^2.2.3}{(3+2)^2}\right)} = \sqrt{\left(6 - \frac{6}{25}\right)} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

hiervon wird subtrahirt $\frac{1.3}{3+2} = \frac{3}{5}$, deshalb ist

$$y = \tfrac{9}{5} = \tfrac{18}{10} = 1{,}8.$$

Nimmt man den Werth für $x = \frac{R^2 - y^2}{2R}$ so wird dieser jetzt

$$= \frac{9 - 3{,}24}{6} = \frac{5{,}76}{6} = 0{,}96.$$

Zusatz 2. Die Auflösung wäre ganz dieselbe gewesen, wenn auch die beiden gegebenen Kreise sich nicht berührt, ja selbst wenn sie sich geschnitten hätten.

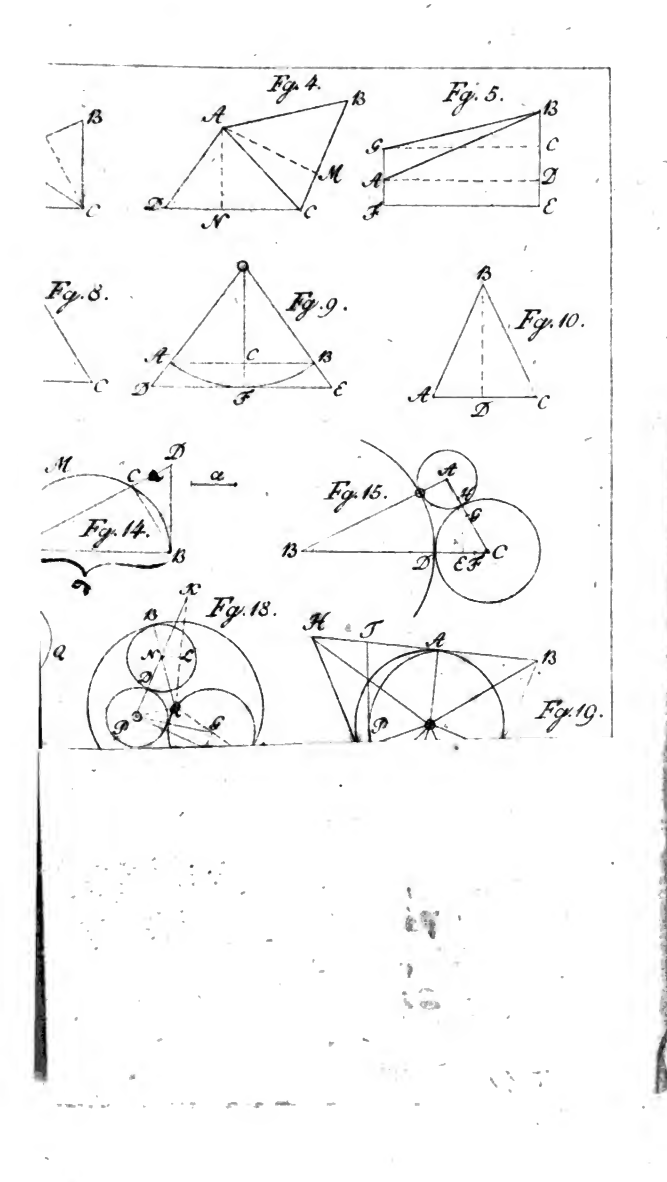


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 18.
Fig. 19.

$x+1=(x-11)^2$

$x+1=x^2-22x+121$

$x^2-23x=-120$

$x=\frac{23}{2}\pm\sqrt{-480+529}$

$=\frac{23\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{30}{2}$

$=\frac{16}{2}=8$

23
23
69
46

$\frac{1}{2}xy$ [illegible] $=p$ [illegible] wo liegt K

$a : a+CL = f+m : y = f+m : \frac{2p}{x}$

Δ KCB + Trap. MCL

$f(a-x) + LC(f+m+y) = y(a-x+CL)$

$CL = \frac{(a-x)(y-f)}{f+m} = CL$

$DL : DC = \varepsilon N + NL : MC$

$CL : DC = \varepsilon N : MC$

$CL : a = y-(f+m) : f+m$

$y = \frac{2fp}{2p-am}$; $x = \frac{2p-am}{f}$

Ottemann Samml. v. Aufg. aus der ebenen Trigonometrie
Zum Schul u. Privatgebr. m. 2 Kupfertafeln ($17\frac{1}{2}$ Sgl.) 1825
Berlin Schlesinger

Aufg. 36 ; Aufg. 62 pag. 32

pag. 148


Google

